

YVES BOULEGUE

Regulae Ingenii

1

Losange logique

Structuration des opérations
interpropositionnelles
bivalentes binaires

Les opérations interpropositionnelles bivalentes (2 valeurs de vérité : Vrai, Faux) du type binaire (2 propositions : p , q) sont au nombre de seize : 16 façons de combiner 2 propositions selon la norme du Vrai et du Faux .

La signification logique de ces opérations considérées isolément ou par couples d'inverses est suffisamment connue . Ce qui l'est moins ce sont les relations générales et les systèmes de transformations qui réunissent ces éléments en des structures déductives..

L'objet de cette étude est d'établir un tel calcul au second degré, calcul structural regroupant les jugements en des systèmes formels de combinaisons a priori .

OPERATIONS	FORMES NORMALES	
	Disjonctives	Conjonctives
I. Affirmation complète ($p \rightarrow q$)	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	(o)
II. Négation complète ($\bar{o}$)	(o)	$(pvq) \cdot (pv\bar{q}) \cdot (\bar{p}pvq) \cdot (\bar{p}pv\bar{q})$
III. Disjonction (pvq)	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$	(pvq)
IV. Incompatibilité ($p q$)	$(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(\bar{p}v\bar{q})$
V. Conditionnelle ($p \rightarrow q$)	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(\bar{p}vq)$
VI. Conditionnelle inverse ($q \rightarrow p$)	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(pv\bar{q})$
VII. Conjonction ($p \cdot q$)	$(p \cdot q)$	$(pvq) \cdot (pv\bar{q}) \cdot (\bar{p}pvq)$
VIII. Négation conjointe ($\bar{p} \cdot \bar{q}$)	$(\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(pv\bar{q}) \cdot (\bar{p}pvq) \cdot (\bar{p}v\bar{q})$
IX. Non-conditionnelle ($p \nmid q$)	$(p \cdot \bar{q})$	$(pvq) \cdot (pv\bar{q}) \cdot (\bar{p}v\bar{q})$
X. Non-contradictoire inverse ($q \nmid p$)	$(\bar{p} \cdot q)$	$(pvq) \cdot (\bar{p}pvq) \cdot (\bar{p}v\bar{q})$
XI. Biconditionnelle ($p = q$)	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(pv\bar{q}) \cdot (\bar{p}pvq)$
XII. Exclusion (pvq)	$(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$	$(pvq) \cdot (\bar{p}v\bar{q})$
XIII. Affirmation de $p : p[q]$	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$	$(pvq) \cdot (\bar{p}v\bar{q})$
XIV. Négation de $p : \bar{p}[q]$	$(\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(\bar{p}vq) \cdot (\bar{p}v\bar{q})$
XV. Affirmation de $q : q[p]$	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$	$(pvq) \cdot (\bar{p}pvq)$
XVI. Négation de $q : \bar{q}[p]$	$(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(pv\bar{q}) \cdot (\bar{p}pv\bar{q})$

Chaque opération est formellement identifiable par une "Table de vérité" où le Vrai = 1 et le Faux = 0. Etant donné la forme normale disjonctive d'une opération, sa table s'obtient en posant 1 pour chaque membre présent et 0 pour chaque absent, selon l'ordre de l'énoncé de l'affirmation complète:

$$(p.q)v(p.\bar{q})v(\bar{p}.q)v(\bar{p}.\bar{q})$$

1 1 1 1

donc $(p*q) = 1111$, c'est à dire : forme interpositionnelle vraie dans tous les cas de figure .

Le tableau précédent des formes normales peut donc se réécrire :

I. $(p*q) = 1111$	IX. $(p.\bar{q}) = 0100$
II. $(o) = 0000$	X. $(\bar{p}.q) = 0010$
III. $(pvq) = 1110$	XI. $(p=q) = 1001$
IV. $(p q) = 0111$	XII. $(pwq) = 0110$
V. $(p>q) = 1011$	XIII. $p[q] = 1100$
VI. $(q>p) = 1101$	XIV. $\bar{p}[q] = 0011$
VII. $(p.q) = 1000$	XV. $q[p] = 1010$
VIII. $(\bar{p}.\bar{q}) = 0001$	XVI. $\bar{q}[p] = 0101$

Reprenons la conditionnelle $(p>q) = (\bar{p}vq)$. Sa table de vérité est : 1011, c.a.d. que le jugement est Vrai aux cases n° 1, 3 et 4 de la table

de vérité, laquelle pourra donc s'écrire: 134 .
 Semblablement l'Incompatibilité $(p|q) = (\bar{p}v\bar{q}) =$
 0111 pourra s'écrire : 234 (deux, trois, quatre).
 Et ainsi de suite .

Inversement une opération quelconque peut se recom-
 poser sous sa forme interpropositionnelle à partir
 de son expression en série chiffrée ou selon la
 suite binaire de la table de vérité . Par ex.
 l'opération 1 signifie en suite binaire :1000,
 qui se réfère à la forme normale disjonctive $(p.q)$.

Cette équivalence symbolique des diverses formules
 ne masquera pas longtemps leur différence quant au
 degré d'abstraction ou de formalisation : seul le
 traitement des opérations dans leur formule tabulaire
 (par ex. 1001) ou sa transposition numérique (14)
 autorisera le calcul direct de systèmes réguliers
 de transformations, cachés sous la formulation
 classique en formes disjonctives ou conjonctives.

Reprenons donc les 16 opérations en les classant
 d'après la composition de leur table de vérité :

Ordre 0 : 0000 (o)

Ordre I : 1000 (1)	0100 (2)
0010 (3)	0001 (4)

Ordre II :	1100 (12)	1010 (13)
	1001 (14)	0110 (23)
	1001 (24)	0011 (34)

Ordre III:	1110 (123)	1101 (124)
	1011 (134)	0111 (234)

Ordre IV : 1111 (1234)

Considérons d'abord les ordres I et III .
Leurs quatre opérations diffèrent par la transformation suivante : 1 se change en 0 et réciproquement.

1000 <----> 0111	0100 <----> 1011
0010 <----> 1101	0001 <----> 1110

Par définition : 1 <----> 0 = Inversion (N)

Chacun des deux ordres présente deux couples qui entretiennent un rapport similaire : renversement du sens de la série binaire .

1000 $\overset{R}{\text{<----->}}$ 0001	1110 $\overset{R}{\text{<----->}}$ 0111
0100 <-----> 0010	1011 <-----> 1101

Par définition : (abcd) <-----> (dcba) =
= Réciprocation (R)

Exprimé en symboles numériques :

$$\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{\text{R}} 4 \\ 2 \xrightarrow{\text{R}} 3 \end{array}$$

Connaissant l'Inverse (N) et la Réciproque (R) d'une opération, nous pouvons calculer l'inverse de la réciproque (ou la réciproque de l'inverse).

Appelons avec Piaget "Corrélative" cette nouvelle opération (C) .

Soit par ex. l'opération 0100 . Sa réciproque est donc 0010, tandis que son inverse = 1011 .

L'inverse de la réciproque = 1101 (NR)

La réciproque de l'inverse = 1101 (RN)

C = NR = RN .

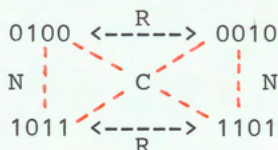
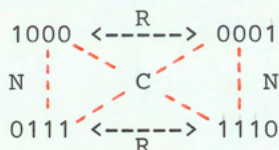
Introduisons encore une transformation identique ou transformation nulle (I) :

par définition: (abcd) $\xrightarrow{\text{I}}$ (abcd)

Exprimé en symboles numériques :

$$\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{\text{I}} 1 \\ 2 \xrightarrow{\text{I}} 2 \\ 3 \xrightarrow{\text{I}} 3 \\ 4 \xrightarrow{\text{I}} 4 \end{array}$$

Ces quatre transformations I, N, R et C rassemblent les ordres I et III en deux groupes commutatifs :



N'importe quelle opération peut être prise pour opération directe support de la transformation identique (I), ou pour inverse (N), ou pour réciproque (R) ou pour corrélative de la directe (C) .

$$I = NN = RR = CC$$

(l'identique = l'inverse de l'inverse, la réciproque de la réciproque, etc.)

$$N = RC = CR$$

$$R = NC = CN$$

$$C = NR = RN$$

$$I = NRC = CNR = RCN = CRN = NCR = RNC$$

La signification intellectuelle du groupe INRC a été découverte et mise en valeur par Piaget, tant en logique des propositions qu'en psychologie de l'intelligence . Ce serait toutefois surestimer le rôle de cette structure que de voir en elle le groupe fondamental de la rationalité formelle : il n'est que l'un des nombreux groupes de transformations

de la logique des propositions; il n'est surtout qu'un sous-groupe d'un groupe plus général, donc plus fondamental de 8 transformations .

Faisons momentanément abstraction du caractère "interpropositionnel" (pvq, etc.) des opérations, pour ne considérer en elles qu'une combinaison strictement formalisée, telle que la représente la matrice binaire ou la série chiffrée .

Soit la matrice d'une opération d'ordre III, par ex. 1110 :

- divisons la en deux parties égales, soit : 11|10
 - opérons la réciprocation interne de chaque partie,
 soit : 11|01

$$\begin{array}{l} (11 \text{ <---> } 11 \\ 10 \text{ <---> } 01) \end{array}$$

Nous appellerons "Contraire" (T) cette double transformation.

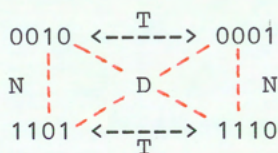
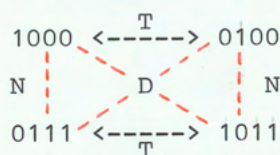
Exprimé en symboles numériques :

$$\begin{array}{l} 1 \text{ <-----}^T \text{> } 2 \\ 3 \text{ <-----> } 4 \end{array}$$

Soit dans l'exemple proposé : 123 <-----_T> 124

L'inverse (N) de la contraire (T) sera conventionnellement désignée comme opération "Concordante" (D).

Les quatre transformations I, N, T et D rassemblent les ordres I et III en deux groupes commutatifs, isomorphes aux deux groupes INRC :



L'isomorphisme des groupes INRC et INTD est exposé par les tables suivantes :

	I	N	R	C
I	I	N	R	C
N	N	I	C	R
R	R	C	I	N
C	C	R	N	I

	I	N	T	D
I	I	N	T	D
N	N	I	D	T
T	T	D	I	N
D	D	T	N	I

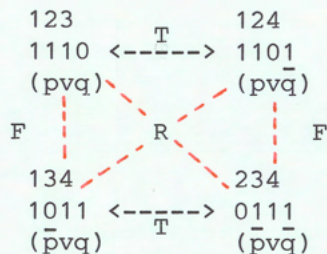
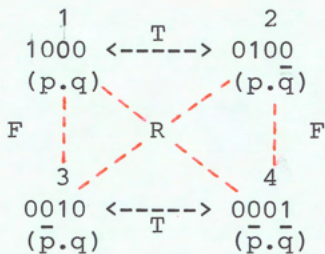
Sachant calculer la réciproque d'une opération nous pouvons calculer la réciproque de la contraire (RT) . Soit par ex. l'opération 1000 (1)
 sa contraire (T) = 0100 (2)
 sa réciproque (R) = 0001 (4)
 la réciproque de sa contraire = 0010 (3)

Décidons d'appeler "Réflexe" la réciproque de la contraire ou la contraire de la réciproque (F) .

Ces quatre transformations: I, T, R et F composent ensemble un groupe commutatif isomorphe aux groupes INRC ou INTD :

	I	R	T	F
I	I	R	T	F
R	R	I	F	T
T	T	F	I	R
F	F	T	R	I

Ce groupe réunit en une seule structure les 4 opérations d'ordre I (les 4 conjonctions simples) d'une part; les 4 opérations d'ordre III (les 4 disjonctions simples) d'autre part :



Ces schémas montrent que la formule de la réflexe (F) est :

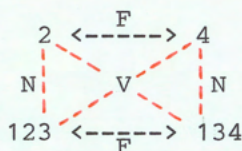
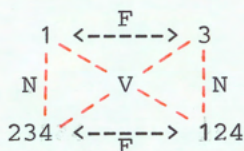
- division de la table binaire en deux parties égales (par ex. 11'01)
- la seconde partie passe devant la première (11'01 ----> 01'11)

Exprimé en symboles numériques :

$$\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{\text{F}} 3 \\ 2 \xrightarrow{\text{F}} 4 \end{array}$$

L'inverse (N) de la réflexe (F) sera désignée comme opération "Transitive" (V) .

Les 4 transformations : I, N, F et V composent ensemble un groupe commutatif isomorphe aux groupes précédents (INRC, INTD, IRTF) :



Le code général des transformations par correspondance symbolique est donc le suivant :

1 <-----> 2	1 <-----> 3	1 <-----> 4
3 <-----> 4	2 <-----> 4	2 <-----> 3
T	F	R

Ce code se combine avec le code des transformations par changement de valeur, qui consiste en la formule de l'Inversion (N).

Cette formule peut d'ailleurs s'exprimer en symboles numériques :

	N
1 <----->	-1
2 <----->	-2
3 <----->	-3
4 <----->	-4

L'opération 234 peut toujours en effet s'écrire -1 .

L'opération 123 peut s'écrire -4 . Et ainsi de suite. L'opération 13 aura donc pour inverse l'opération -13 (absence de valeur positive aux cases 1 et 3 de la table de vérité), autrement dit l'opération 24 .

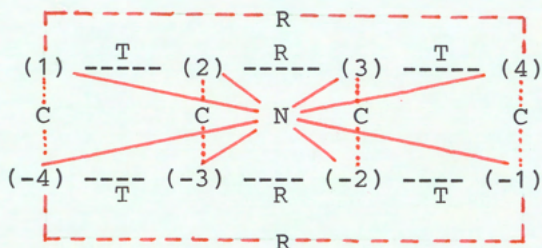
Cette manière de s'exprimer n'est guère utile dans le cadre binaire où la formule des opérations reste brève . Elle le sera beaucoup plus dans les systèmes ultérieurs .

De la combinaison de ces deux codes de transformations, il résulte qu'il est possible de regrouper

en un même système général l'ensemble des transformations envisagées jusqu'à présent sur les familles I et III : I, N, R, C, T, D, F, V .
Elles composent un groupe commutatif de 8 transformations, comme le vérifie la table suivante :

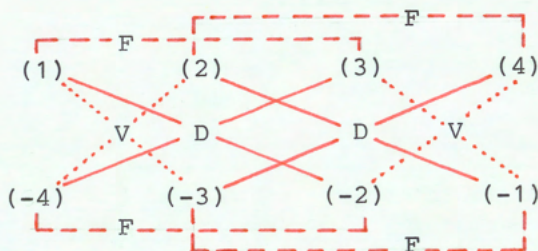
	I	N	R	C	T	D	F	V
I	I	N	R	C	T	D	F	V
N	N	I	C	R	D	T	V	F
R	R	C	I	N	F	V	T	D
C	C	R	N	I	V	F	D	T
T	T	D	F	V	I	N	R	C
D	D	T	V	F	N	I	C	R
F	F	V	T	D	R	C	I	N
V	V	F	D	T	C	R	N	I

Ce qui se traduit par ce schéma opératoire dédoublé:



I	N	T	D	F	V	R	C
(p.q) 1000 1	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 0111	(p.q) 0100	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1011	($\bar{p}.q$) 0010	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1101	($\bar{p}.q$) 0001	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1110
($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 0111 234	(p.q) 1000	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1011	(p.q) 0100	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1101	($\bar{p}.q$) 0010	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1110	($\bar{p}.q$) 0001
(p.q) 0100 2	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1011	(p.q) 1000	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 0111	($\bar{p}.q$) 0111	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1110	($\bar{p}.q$) 0010	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1101
($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1011 134	(p.q) 0100	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 0111	(p.q) 1000	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1110	($\bar{p}.q$) 0001	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1101	($\bar{p}.q$) 0010
($\bar{p}.q$) 0010 3	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1101	($\bar{p}.q$) 0001	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1110	(p.q) 1000	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 0111	(p.q) 0100	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1011
($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1101 124	(p.q) 0010	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1110	($\bar{p}.q$) 0001	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 0111	(p.q) 1000	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1011	(p.q) 0100
($\bar{p}.q$) 0001 4	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1110	(p.q) 0010	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1101	(p.q) 0100	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1011	(p.q) 1000	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 0111
($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1110 123	(p.q) 0001	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1101	(p.q) 0010	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 1011	(p.q) 0100	($\bar{p}\bar{v}\bar{q}$) 0111	(p.q) 1000

Le groupe INTDFVRC des opérations d'ordre I et III



Le groupe des 8 transformations INRCTDFV réunit en une structure unique les 8 opérations disjonctives et conjonctives simples (ordres I et III) [tableau page 16] .

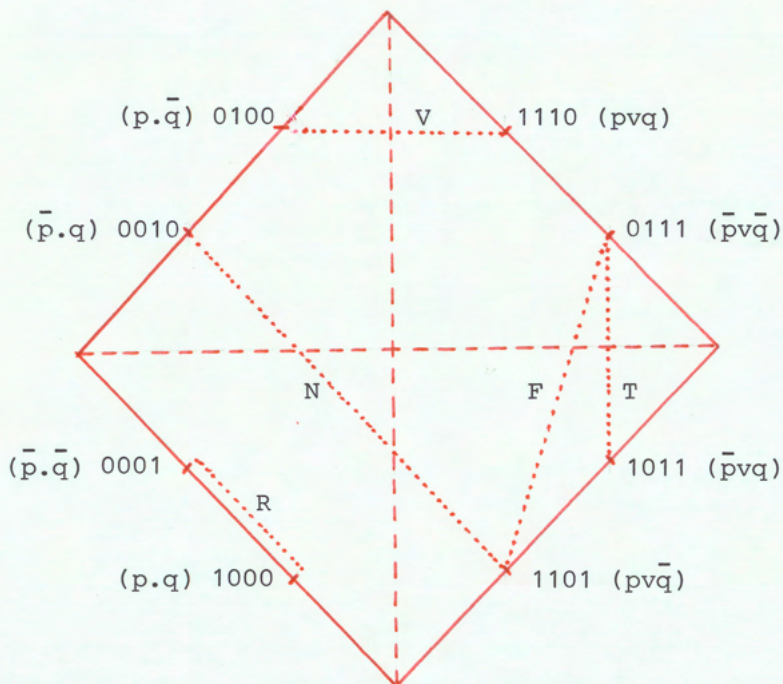
Dans ce groupe n'importe quelle fonction peut être assurée par n'importe quelle opération: chaque opération considérée comme support de la transformation identique (I) a son inverse (N), sa contraire (T), sa concordante (D), sa réflexive (F), sa transitive (V), sa réciproque (R) et sa corrélatrice (C) .

La composition est commutative: $NR = RN$; $CT = TC$; etc.

La composition est associative: $RTC = TRC = CRT$; etc.

Le produit de deux transformations est une transformation de l'ensemble: $NR = C$; $RT = F$; etc.

Ces relations recevront une expression plus claire et distincte si nous les transposons sur un symbole géométrique :



Les réciproques (R) sont les couples situés sur les côtés du losange.

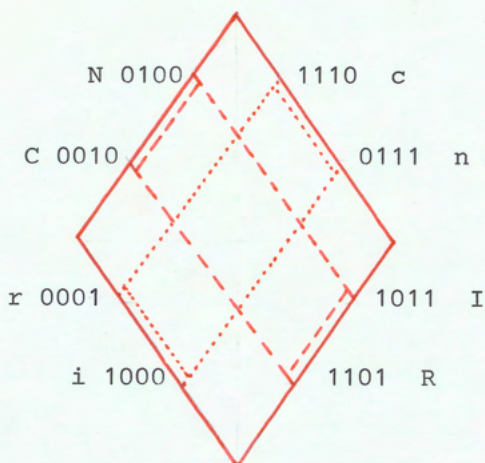
Les inverses sont les éléments situés sur une parallèle à l'un des côtés du losange .

Les contraires (T) sont situés sur une parallèle à l'axe vertical .

Les réflexes (F) sont les réciproques des T .

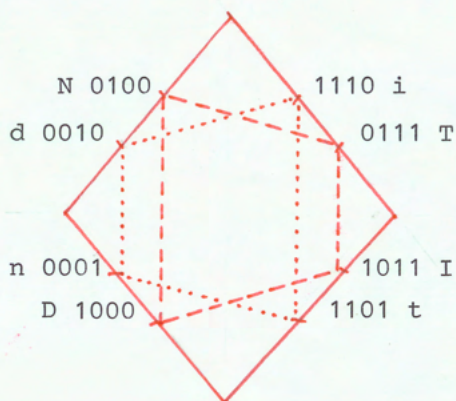
Les transitives (V) sont les opérations situées sur une parallèle à l'axe horizontal .

Nous retrouvons aisément les quatre groupes de 4 transformations déjà identifiés au sein du groupe général des 8 : INRC, INTD, INFV et IRTF .



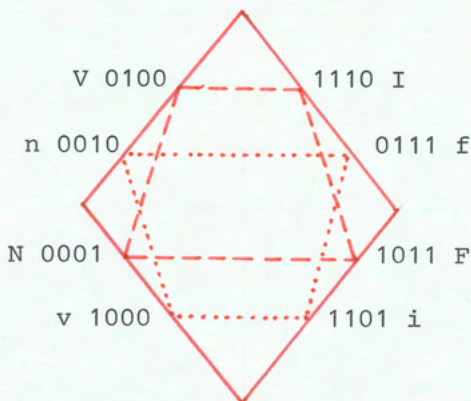
Les deux
sous-groupes
INRC

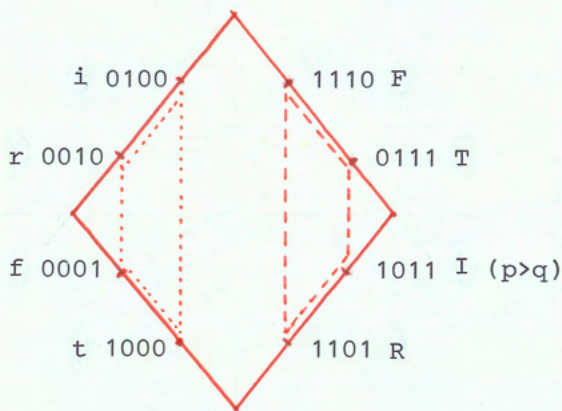
[le choix de I est
arbitraire]



Les deux
sous-groupes
ITND

Les deux
sous-groupes
IFNV





Les deux
sous-groupes
IRFT

Si la transformation I est appliquée à la conditionnelle $(p > q) = (p | \bar{q})$ alors :

$$T = (p > \bar{q}) = (p | q)$$

$$R = (\bar{p} > \bar{q}) = (\bar{p} | q) = (q > p)$$

$$F = (\bar{p} > q) = (\bar{p} | \bar{q})$$

En termes de classes comme de propositions la réflexe (F) est distincte de la réciproque (R) et de la contraire (T), et tout aussi importante pour le raisonnement .

Soit p = citoyen

q = sujet à l'impôt

Soit le jugement: Tout citoyen est sujet à l'impôt
- transposition en termes de classes de la combinaison $(p \supset q)$.

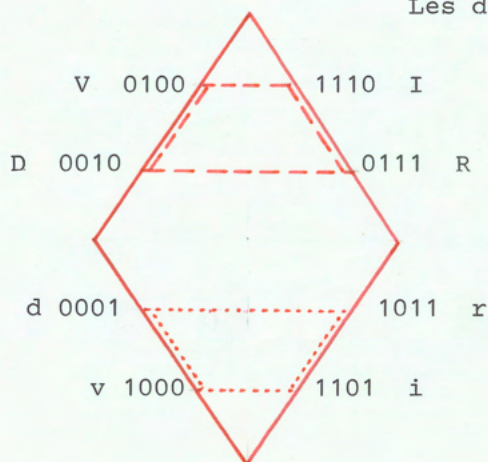
T = aucun citoyen n'est sujet à l'impôt $(p|q)$
(tout citoyen est non-sujet à l'impôt) $(p \supset \bar{q})$

R = tout sujet à l'impôt est citoyen $(q \supset q)$
(tout non-citoyen est non-sujet à l'impôt) $(\bar{p} \supset \bar{q})$
(aucun non-citoyen n'est sujet à l'impôt) $(\bar{p}|q)$

F = tout non-citoyen est sujet à l'impôt $(\bar{p} \supset q)$
(aucun non-citoyen n'est non-sujet à l'impôt)
 $(\bar{p}|\bar{q})$

L'examen du groupe général permet de distinguer encore 3 (couples) de sous-groupes de 4 transformations : IRDV, ITCV et IFCD

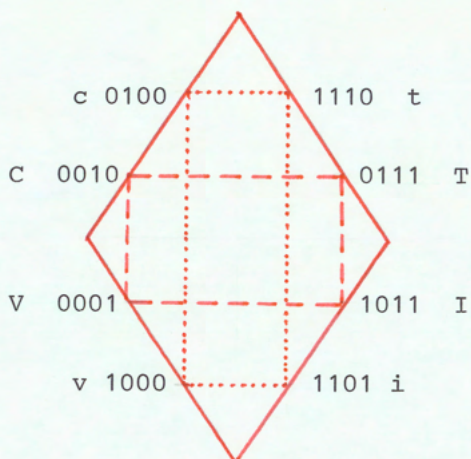
Les deux sous-groupes IRDV

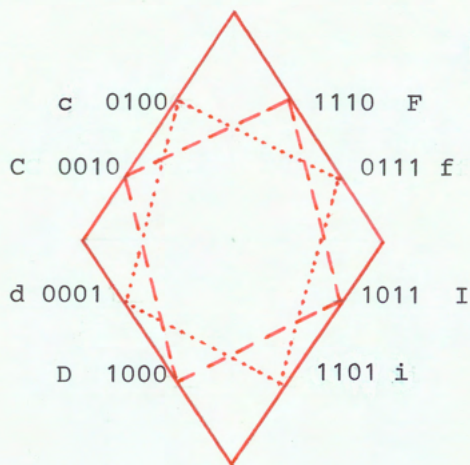


D et V sont R
D et R sont V
R et V sont D

Les deux sous-groupes ITCV

T et V sont C
C et V sont T
C et T sont V





Les deux
sous-groupes
IFCD

C et F sont D
C et D sont F
D et F sont C

Le groupe général des 8 transformations INRCTDFV
se décompose donc en 7 doubles groupes de 4
transformations :

INRC	IRDV	ITCV
INFV	IRTF	IFCD
INTD		

Parmi ces 7 groupes :

3 comportent une transformation R

3 ... N

3 ... C

3 comportent une transformation T

3 ... D

3 ... F

3 ... V

Les 7 comportent la transformation identique I .

Les trois (doubles) sous-groupes IRVD, ITCV et IFCD utilisent les quatre opérations directes qui interviennent dans la constitution des opérations d'ordre II, sous leurs formes disjonctive et conjonctive .

IRVD combine les opérations intervenant dans la formation de l'exclusion et de l'équivalence (bi-conditionnelle) .

ITCV combine les opérations intervenant dans la formation de l'affirmation de p et de la négation de p .

IFCD combine les opérations intervenant dans la formation de l'affirmation de q et de la négation de q.

Ces opérations d'ordre II elles-mêmes ne se soumettent à la combinaison de groupe que sous sa forme la plus simple ou condensée: groupe de deux transformations.

Equivalence $[1001 = (p=q)]$ et exclusion $[0110 = (p \neq q)]$:

Si I s'applique à $1001 = R, V, D$

N = $0110 = C, F, T$

Affirmation de p (1100) et négation de p (0011) :

Si I s'applique à $1100 = C, T, V$

N = $0011 = R, D, F$

Affirmation de q (1010) et négation de q (0101) :

Si I s'applique à $1010 = C, F, D$

N = $0101 = R, V, T$

Plutôt qu'en termes de rapports de groupe c'est en termes de rapports d'emboîtement qu'il faut envisager les caractères de ces opérations .

L'opérateur (.) de la multiplication logique permet de retenir seulement la partie commune positive des tables de vérité :

. 1000	. 1011	. 0011	
. 0001	. 0101	. 0010	
0000	0001	0010	et ainsi de suite.

L'opérateur (v) de l'addition logique permet d'ajouter les éléments positifs des tables de vérité:

1000	1011	0011	
v	v	v	
0001	0101	0010	
<u>1001</u>	<u>1111</u>	<u>0011</u>	

et ainsi de suite .

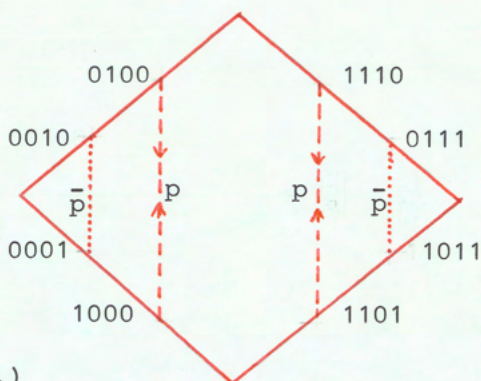
L'addition (v) des contraires (T) d'ordre I produit l'Affirmation de p et la Négation de p :

$$1000 \vee 0100 = 1100$$

$$p(q)$$

$$0001 \vee 0010 = 0011$$

$$\bar{p}(q)$$



La multiplication (.) des contraires (T) d'ordre III produit les mêmes opérations :

$$1110 \cdot 1101 = 1100$$

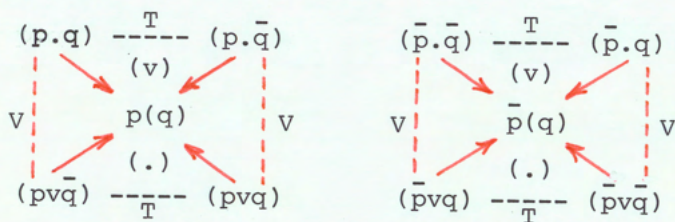
$$p(q)$$

$$0111 \cdot 1011 = 0011$$

$$\bar{p}(q)$$

Nous définissons ainsi les opérations d'ordre II 1100 et 0011 comme les "médiatives" des opérations contraires .

Cette communication entre les niveaux d'ordre I et II peut également se présenter sous la forme suivante :



En revanche la multiplication $(.)$ des contraires d'ordre I donnera la Négation complète = 0000
 L'addition (v) des contraires d'ordre III donnera l'Affirmation complète = 1111 .

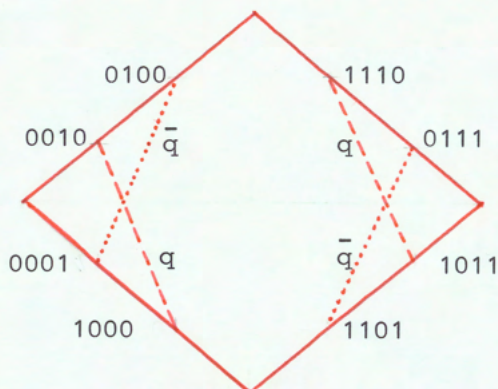
L'addition des réflexes (F) d'ordre I produit l'Affirmation de q et la Négation de q :

$$0100 \vee 0001 = 0101$$

$$\bar{q}(p)$$

$$0010 \vee 1000 = 1010$$

$$q(p)$$



La multiplication des réflexes (F) d'ordre III produit les mêmes opérations :

$$1110 \cdot 1011 = 1010$$

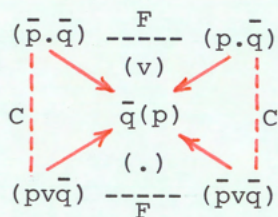
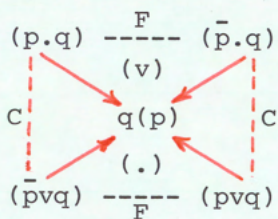
$$q(p)$$

$$0111 \cdot 1101 = 0101$$

$$\bar{q}(p)$$

Nous définissons ainsi les opérations d'ordre II 1010 et 0101 comme les "médiateurs" des opérations réflexes .

Cette communication entre les deux niveaux d'ordre peut également se présenter sous la forme suivante:



En revanche la multiplication (.) des réflexes d'ordre I donnera la négation complète, tandis que l'addition (v) des réflexes d'ordre III donnera l'affirmation complète .

L'addition (v) des réciproques d'ordre I produit l'exclusion et l'équivalence (biconditionnelle):

$$0010 \vee 0100 = 0110 \quad (pwq)$$

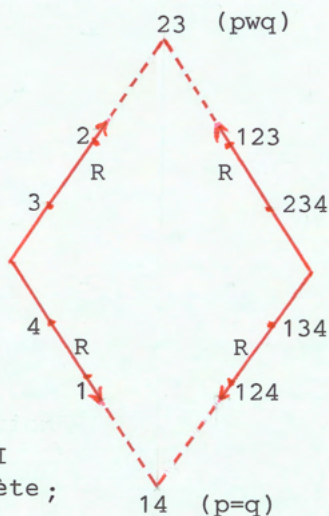
$$1000 \vee 0001 = 1001 \quad (p=q)$$

La multiplication (.) des R d'ordre III produit les mêmes opérations:

$$1110 \cdot 0111 = 0110 \quad (pwq)$$

$$1011 \cdot 1101 = 1001 \quad (p=q)$$

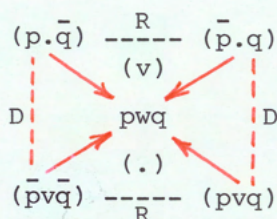
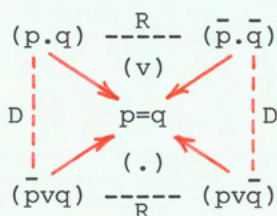
Nous définissons ainsi les opérations d'ordre II : 0110 (23) et 1001 (14) comme les "médiatives" des opérations réciproques.



En revanche la multiplication (.) des R d'ordre I donnera la négation complète;

l'addition (v) des R d'ordre III donnera l'affirmation complète .

Cette communication entre les deux niveaux d'ordre peut également se présenter ainsi :



En conclusion, les 6 opérations d'ordre II peuvent se définir en termes d'emboîtement comme les médiatives des opérations d'ordre I et III . Soit que cette médiation s'exerce dans le sens de l'analyse (affirmation ou négation de l'un ou l'autre élément: p , $\bar{p}$, q , $\bar{q}$); soit qu'elle s'exerce dans le sens de la synthèse (équivalence et exclusion) .

L'addition des C, V ou D est tautologique : elle redonne l'opération d'ordre III composante :

$$1110 \underset{C}{v} 1000 = 1110$$

$$1110 \underset{V}{v} 0100 = 1110$$

La multiplication des C, V ou D est tautologique :
elle redonne l'opération d'ordre I composante .

$$0100 \cdot 1110 = 0100$$

V

$$1000 \cdot 1110 = 1000$$

D

et ainsi de suite .

Entre le premier et le second niveau d'ordre, il existe cependant par l'intermédiaire des C, V et D un ensemble de liaisons régulières :

$$pvq = D \vee p(q) = V \vee q(p) = C \vee (pwq)$$

$$\bar{p}v\bar{q} = D \vee \bar{p}(q) = V \vee \bar{q}(p) = C \vee (pwq)$$

$$\bar{p}vq = D \vee \bar{p}(q) = V \vee q(p) = C \vee (p=q)$$

$$pv\bar{q} = D \vee p(q) = V \vee \bar{q}(p) = C \vee (p=q)$$

Soit par ex. pour cette dernière ligne :

$$1101 = 0001 \vee 1100 = 1000 \vee 0101 = 0100 \vee 1001$$

$$p.q = D \cdot p(q) = V \cdot q(p) = C \cdot (p=q)$$

$$\bar{p}.\bar{q} = D \cdot \bar{p}(q) = V \cdot \bar{q}(p) = C \cdot (p=q)$$

$$\bar{p}.q = D \cdot \bar{p}(q) = V \cdot q(p) = C \cdot (pwq)$$

$$p.\bar{q} = D \cdot p(q) = V \cdot \bar{q}(p) = C \cdot (pwq)$$

Soit par ex. pour cette dernière ligne :

$0100 = 0111 \cdot 1100 = 1110 \cdot 0101 = 1101 \cdot 0110$

L'addition des inverses (N) produit toujours l'Affirmation complète .

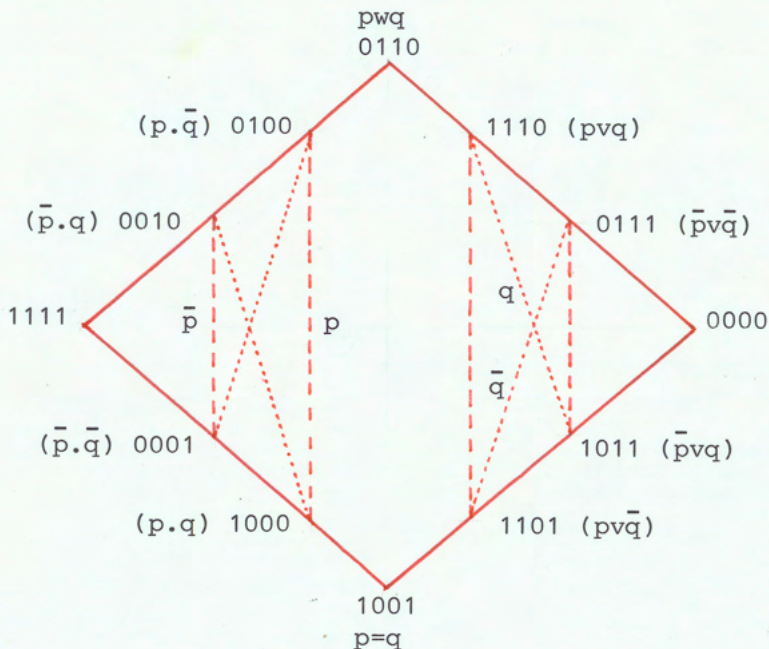
La multiplication des inverses produit toujours la Négation complète .

Additions et multiplications des médiatives de R, T ou F produiront donc également l'Affirmation et la Négation complètes, puisqu'il s'agit de couples d'inverses .

Ces deux opérations "complétives" peuvent également être produites par la multiplication des 4 opérations d'ordre III : $1110 \cdot 1101 \cdot 1011 \cdot 0111 = 000$

ou bien par l'addition des 4 opérations d'ordre I : $1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 = 1234$.

Les deux complétives couronnent ainsi la structure des emboîtements .



La structure des opérations binaires est ainsi une construction à trois niveaux :

- les opérations directes qui composent un groupe de 8 transformations INTDFVRC
- les opérations médiatives des précédentes, réparties en trois couples d'inverses : emboîtements de T, de F et de R

- les opérations complétives, couple d'inverses où s'emboîtent les médiatives et plus généralement toutes les inverses (qu'elles soient directes ou médiatives) .

L'intérêt du losange opératoire est de réunir symboliquement, en un seul système de transformations simultanées, les relations fondamentales de groupe et celles d'emboîtement dichotomique qui leurs sont subordonnées, entretenues par les 16 opérations binaires bivalentes .

Etant donnée une opération directe d'ordre I ou III, les 7 autres opérations directes sont fixées par les transformations du groupe INRCTDFV; puis par addition ou multiplication des T, F et R les 6 opérations d'ordre II; puis (entre autres procédures) par composition de ces médiatives d'ordre II, les 2 opérations complétives générales .

L'efficacité organisatrice de cette structure se vérifie par l'examen des 256 opérations ternaires de la logique bivalente .

**Structuration des opérations
bivalentes ternaires**

Faisons d'emblée abstraction de la signification logique concrète des opérations [(p.q.r), etc.] pour ne considérer en elles qu'un schème combinatoire formalisé, tel que le présente la table de vérité ou sa traduction en symboles ordinaux .

Une opération ternaire est donc d'abord une table de vérité à 8 cases dans laquelle le 1 symbolise le Vrai et le 0 le Faux . Cette série peut être traduite en chiffres indiquant la place du 1 dans la table de vérité .

Une opération dont la table s'écrit : 10010010 s'exprimera plus simplement par le symbole 147, signifiant que le jugement est Vrai aux cases n°1, 4 et 7 de la matrice bivalente .

La signification interpropositionnelle de ces symboles est donnée par le tableau suivant :

1 - (p.q.r)	5 - ($\bar{p}$.q.r)
2 - (p.q. $\bar{r}$)	6 - ($\bar{p}$.q. $\bar{r}$)
3 - (p. $\bar{q}$.r)	7 - ($\bar{p}$. $\bar{q}$.r)
4 - (p. $\bar{q}$. $\bar{r}$)	8 - ($\bar{p}$. $\bar{q}$. $\bar{r}$)

L'opération "147" signifie donc, en forme normale disjonctive :

$$(p.q.r)v(p.\bar{q}.\bar{r})v(\bar{p}.\bar{q}.r)$$

L'inverse (N) de 147 pourrait s'écrire : 23568 .
Elle sera plutôt transcrite sous la forme : -147
c.a.d. : absence de 1 aux cases n°1, 4, 7 de la
matrice bivalente (ou bien présence en 2, 3, 5,
6 et 8 seulement).

L'opération "-147" signifie donc, en forme normale disjonctive:

$$(p.q.\bar{r})v(p.\bar{q}.r)v(\bar{p}.q.r)v(\bar{p}.q.\bar{r})v(\bar{p}.\bar{q}.\bar{r})$$

2 3 5 6 8

Comme dans le système binaire les opérations se divisent en ordres, selon le nombre de valeurs Vraies de leur matrice bivalente .

Elles sont au nombre de 256 (16^2) et se répartissent ainsi :

Ordre	0 = 1	Ordre VIII	= 1
	I = 8	VII	= 8
	II = 28	VI	= 28
	III = 56	V	= 56
	IV = 70		

Soit la première des opérations d'ordre $I = 1$
 $= 1000\ 0000 = (p.q.r)$

Supposons que les opérations ternaires obéissent,
 au minimum, aux règles du losange binaire: nous
 pouvons alors situer cette opération dans un
 groupe de 8 transformations INRCTDFV :

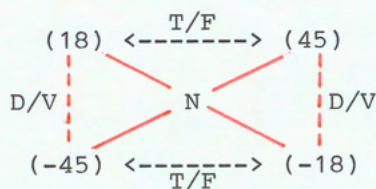
1000 0000 (1)
 N = 0111 1111 (-1)
 (inversion des valeurs)
 R = 0000 0001 (8)
 (inversion du sens de l'opération)
 C = 1111 1110 (-8)
 (= NR)
 T = 0001 0000 (4)
 (division de la table en deux parties égales;
 réciprocation interne de chaque partie)
 D = 1110 1111 (-4)
 (= NT)
 F = 0000 1000 (5)
 (= RT; division de la table en deux parties
 égales; la seconde passe devant la première)
 V = 1111 0111 (-5)
 (= NF)

Les couples de Réciproques sont : $1/8$; $4/5$
et leurs inverses .

Les médiatives de R sont donc :

$$1 \vee 8 = 18 \qquad -1 \vee -8 = -18$$

$$4 \vee 5 = 45 \qquad -4 \vee -5 = -45$$

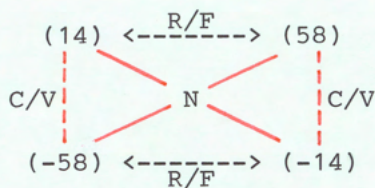


Les couples de Contraires sont : $1/4$; $5/8$ et leurs inverses .

Les médiatives de T sont donc :

$$1 \vee 4 = 14 \qquad -1 \vee -4 = -14$$

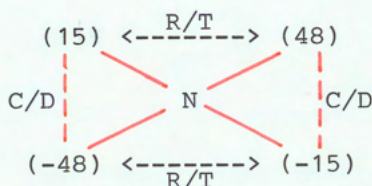
$$5 \vee 8 = 58 \qquad -5 \vee -8 = -58$$



Les couples de Réflexes sont : $1/5$; $4/8$ et leurs inverses .

Les médiatives de F sont donc :

$$\begin{array}{ll} 1 \vee 5 = 15 & -1 \vee -5 = -15 \\ 4 \vee 8 = 48 & -4 \vee -8 = -48 \end{array}$$



L'addition logique des couples de médiatives fournit dans tous les cas les opérations :

$$1458 \xrightarrow[N]{\text{---}} -1458 \quad (2367)$$

qui sont donc les opérations complétives de ce premier losange .

Cependant les opérations d'ordre I et leurs inverses d'ordre VII ($=-I$) ne sont encore utilisées que pour moitié . Calculons donc un second losange à partir de la seconde opération d'ordre I $= 2 = 0100 \ 0000$

$$0100\ 0000 = 2$$

$$N = -2$$

$$R = 0000\ 0010 = 7$$

$$C = -7$$

$$T = 0010\ 0000 = 3$$

$$D = -3$$

$$F = 0000\ 0100 = 6$$

$$V = -6$$

Les couples de Réciproques sont : 2/7 ; 3/6 et leurs inverses .

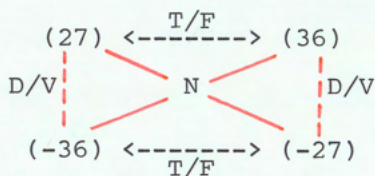
Les médiatives de R sont donc :

$$2 \vee 7 = 27$$

$$-2 \vee -7 = -27$$

$$3 \vee 6 = 36$$

$$-3 \vee -6 = -36$$



Les couples de Contraires sont : 2/3 ; 6/7 et leurs inverses .

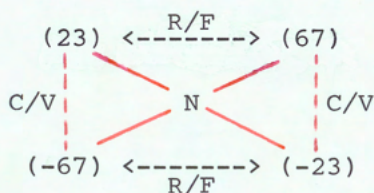
Les médiatives de T sont donc :

$$2 \vee 3 = 23$$

$$-2 \vee -3 = -23$$

$$6 \vee 7 = 67$$

$$-6 \vee -7 = -67$$



Les couples de Réflexes sont : 2/6 ; 3/7 et leurs inverses .

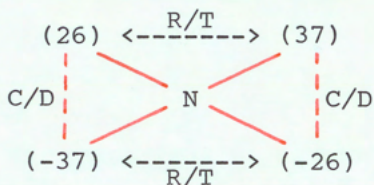
Les médiatives de F sont donc :

$$2 \vee 6 = 26$$

$$-2 \vee -6 = -26$$

$$3 \vee 7 = 37$$

$$-3 \vee -7 = -37$$

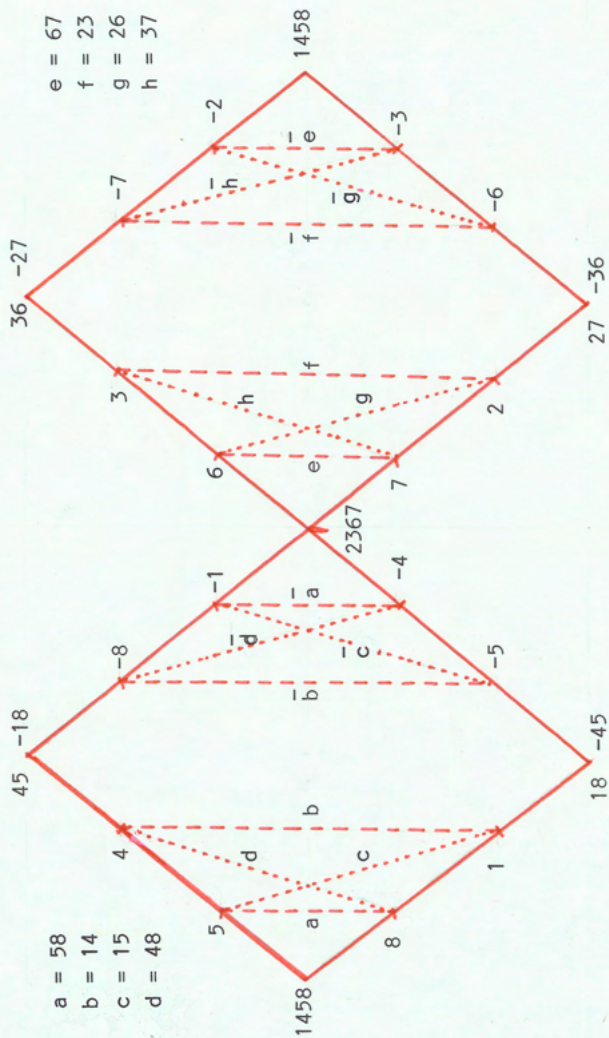


L'addition logique des couples de médiatives fournit les opérations :

$$2367 \xleftrightarrow{N} -2367 \quad (1458)$$

qui sont donc les opérations complétives du second losange .

Ces complétives sont identiques à celles du premier losange, avec inversion de la définition des opérations : 2367 est positive dans le second



et négative dans le premier . Cette identité des complétives à fonction inverse permet de regrouper les deux losanges en une seule structure de 42 opérations simultanées .

Le rapport constant entre deux opérations à fonction relative identique sur les deux losanges définit une nouvelle transformation, propre aux opérations ternaires, que nous appellerons transformation "Bis" (B) .

Par rapport à la matrice bivalente elle se définit de la façon suivante :

- division de la table en couples

$$10 \ 00 \ 00 \ 00 = 1$$

- réciprocation interne de chaque couple (avec conservation de l'ordre général)

$$01 \ 00 \ 00 \ 00 = 2$$

Si les opérations 1 et 2 entretiennent la relation B, alors toutes les opérations du groupe INRCTDFV que chacune commande, entretiennent elles-mêmes la relation B .

	1	N	R	C	T	D	F	V	
B	↕							↕	B
	2	N	R	C	T	D	F	V	

Semblablement : les médiatives de R, F et T entretiennent d'un losange à l'autre la relation B .

Par ex. :

médiatives de F du losange (2) :

01 00 01 00 = 26

↕
B

00 10 00 10 = 37

↕
B

10 00 10 00 = 15

00 01 00 01 = 48

médiatives de F du losange (1) .

Les complétives des deux systèmes entretiennent elles-mêmes la relation B, qui se confond alors avec l'inversion (N) :

	10 01 10 01	= 1458
B/N	↕	
	01 10 01 10	= 2367

Il existe donc par la transformation B une correspondance bi-univoque et réciproque entre les deux losanges, qui constituent ensemble une structure unique de bi-losange .

L'armature du bi-losange est le groupe de 16 transformations (INRCTDFV) x B, soit :

I N R C T D F V B Nb Rb Cb Tb Db Fb Vb

Ces transformations composent ensemble un groupe commutatif, comme l'atteste le tableau de la page suivante .

Comme la Contraire (T) la transformation B est une variante de la réciprocité, combinée avec l'opération de "division" de la matrice bivalente . Peu perceptible en termes de combinaisons propositionnelles concrètes (p,q,r), elle s'impose dès lors que le matériau propre des combinaisons devient cette matrice bivalente, schéma formel des opérations . Elle accède même à l'évidence lorsque cette matrice est traduite en symboles numériques ordinaux :

1 --- 2	1 --- 3	1 --- 4	1 --- 5
3 --- 4	2 --- 4	2 --- 3	2 --- 6
5 --- 6	5 --- 7	5 --- 8	3 --- 7
7 --- 8	6 --- 8	6 --- 7	4 --- 8
B	Tb	T	F

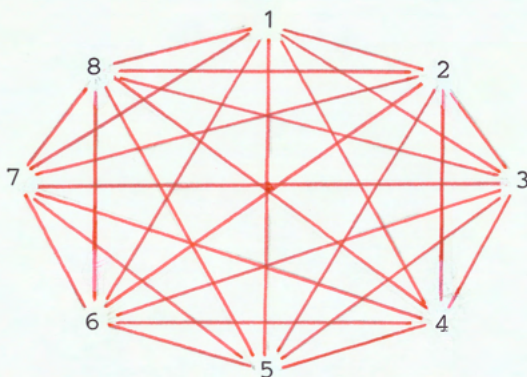
	I	N	R	C	T	D	F	V	B	Nb	Rb	Cb	Tb	Db	Fb	Vb
I	I	N	R	C	T	D	F	V	B	Nb	Rb	Cb	Tb	Db	Fb	Vb
N	N	I	C	R	D	T	V	F	Nb	B	Cb	Rb	Db	Tb	Vb	Fb
R	R	C	I	N	F	V	T	D	Rb	Cb	B	Nb	Fb	Vb	Tb	Db
C	C	R	N	I	V	F	D	T	Cb	Rb	Nb	B	Vb	Fb	Db	Tb
T	T	D	F	V	I	N	R	C	Tb	Db	Fb	Vb	B	Nb	Rb	Cb
D	D	T	V	F	N	I	C	R	Db	Tb	Vb	Fb	Nb	B	Cb	Rb
F	F	V	T	D	R	C	I	N	Fb	Vb	Tb	Db	Rb	Cb	B	Nb
V	V	F	D	T	C	R	N	I	Vb	Fb	Db	Tb	Cb	Rb	Nb	B
B	B	Nb	Rb	Cb	Tb	Db	Fb	Vb	I	N	R	C	T	D	F	V
Nb	Nb	B	Cb	Rb	Db	Tb	Vb	Fb	N	I	C	R	D	T	V	F
Rb	Rb	Cb	B	Nb	Fb	Vb	Tb	Db	R	C	I	N	F	V	T	D
Cb	Cb	Rb	Nb	B	Vb	Fb	Db	Tb	C	R	N	I	V	F	D	T
Tb	Tb	Db	Fb	Vb	B	Nb	Rb	Cb	T	D	F	V	I	N	R	C
Db	Db	Tb	Vb	Fb	Nb	B	Cb	Rb	D	T	V	F	N	I	C	R
Fb	Fb	Vb	Tb	Db	Rb	Cb	B	Nb	F	V	T	D	R	C	I	N
Vb	Vb	Fb	Db	Tb	Cb	Rb	Nb	B	V	F	D	T	C	R	N	I

Table des transformations du groupe de 16

1 --- 6
 2 --- 5
 3 --- 8
 4 --- 7
 Fb

1 --- 7
 2 --- 8
 3 --- 5
 4 --- 6
 Rb

1 --- 8
 2 --- 7
 3 --- 6
 4 --- 5
 R



Simple problème de combinaison, abstraction faite
 de sa signification dans le jugement concret .

Les opérations d'ordre II et leurs inverses d'ordre VI sont, les unes et les autres, au nombre de 28 .

12 ont été introduites lors de la construction du bi-losange d'ordre I: 14, 15, 18, 23, 26, 27, 36, 37, 45, 48, 58, 67 - et leurs inverses .

Ces opérations ont été introduites en termes de rapports d'emboîtement à partir de l'addition (v) des opérations d'ordre I . Leur capacité à entretenir des rapports de groupe commutatif a également été mis en lumière . C'est selon ces deux dimensions complémentaires que les 16 opérations restantes seront à leur tour envisagées .

La première d'entre elles est l'opération 12 . Elle peut être obtenue comme le produit de l'addition des deux premières opérations d'ordre I, en relation B : $1 \vee 2 = 12$.

Sa réciproque = 78 est également le produit de l'addition des réciproques de 1 et 2 = 8 et 7 (elles-mêmes en relation B) .

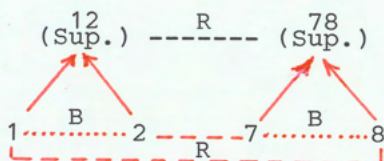
La contraire de 12 = 34 . Celle-ci est également le produit de l'addition des contraires de 1 et 2 = 4 et 3 (elles-mêmes en relation B) .

La réflexe de 12 (ou R de sa T) = 56 . Elle est également le produit de l'addition des réflexes de 1 et 2 = 5 et 6 (elles-mêmes en relation B) .

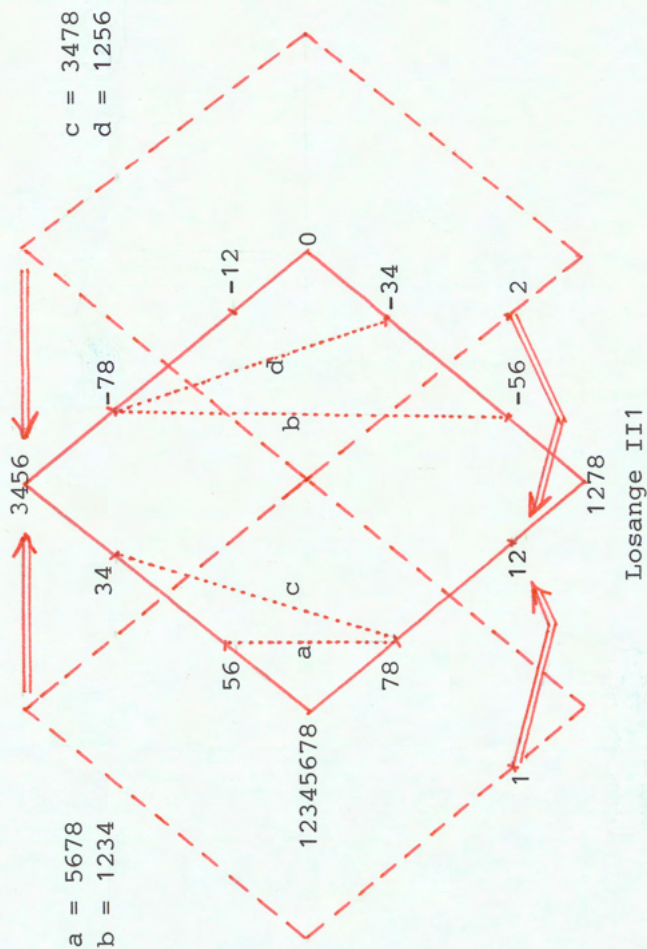
Désignons par "Borne supérieure" (Sup.) le produit de l'addition logique .

Les relations qui précèdent signifient que la réciproque (R), la contraire (T) ou la réflexe (F) de la borne supérieure de 2 opérations en relation B, est respectivement la borne supérieure des réciproques (R), des contraires (T) ou des réflexes (F) de ces deux opérations, dont les R,T ou F conservent la relation B .

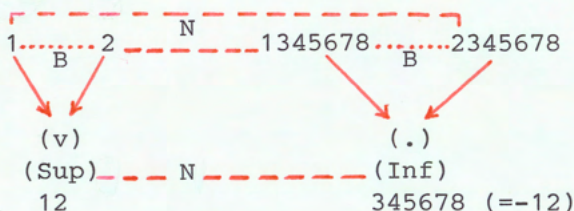
Par ex. :



Les mêmes rapports sont automatiquement valables pour les inverses (N) des opérations en cause puisqu'elles peuvent s'écrire sous la forme -1, -2 etc. et manipulées par addition logique . Cependant, l'inverse étant la simple négation des valeurs de la matrice bivalente, ne modifiant pas l'ordre de cette matrice, la règle précédente s'énoncera également en fonction de la multiplication logique (.) .



Désignons par "Borne inférieure" le produit de la multiplication logique .
 L'inverse (N) de la borne supérieure de deux opérations en relation B, est la borne inférieure de leurs inverses (N), elles-mêmes en relation B .
 Par ex .



D'une manière générale, l'inverse (N), la corrélatrice (C), la concordante (D) ou la transitive (V) de la borne supérieure de deux opérations en relation B, est respectivement la borne inférieure des inverses (N), corrélatrices (C), concordantes (D) ou transitives (V) de ces deux opérations, dont les N, C, D ou V conservent la relation B .

Par conséquent : la relation Bis (B) conserve les rapports du groupe de 8 (INRCTDFV) dans l'addition et la multiplication logiques .

Les médiatives de réciproques de cette structure d'opérations d'ordre II peuvent dès lors être obtenues soit comme Sup./Inf. des couples de R :

$$\begin{aligned} 12 \vee 78 &= 1278 \quad (\text{Sup}) \\ 123478 \cdot 125678 &= 1278 \quad (\text{Inf}) \\ (-56) \quad (-34) \quad &(-3456) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 34 \vee 56 &= 3456 \quad (\text{Sup}) \\ 123456 \cdot 345678 &= 3456 \quad (\text{Inf}) \\ (-78) \quad (-12) \quad &(-1278) \end{aligned}$$

Soit comme Sup./Inf. des médiatives de R de chaque losange d'ordre I :

$$\begin{aligned} 18 \vee 27 &= 1278 \quad (\text{Sup}) \\ 123678 \cdot 124578 &= 1278 \quad (\text{Inf}) \\ (-45) \quad (-36) \quad &(-3456) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45 \vee 36 &= 3456 \quad (\text{Sup}) \\ 234567 \cdot 134568 &= 3456 \quad (\text{Inf}) \\ (-18) \quad (-27) \quad &(-1278) \end{aligned}$$

Double règle de calcul valable pour les médiatives de T : 1234 , 5678
et de F : 1256 , 3478

Par conséquent : la Sup./Inf. des médiatives de R, T ou F en relation B, est la Sup./Inf. des R, T ou F du losange dont les opérations sont elles-mêmes les Sup./Inf. de celles qui composent ces médiatives de R, T ou F, opérations qui déjà entretiennent la relation B .

Les complétives se calculeront donc également soit à partir des opérations du losange d'ordre II actuel, soit à partir des complétives des losanges d'ordre I (en relation $B = N$) :

$12 \vee 78 \vee 34 \vee 56 = 12345678$

et son inverse = 0

ou bien : $1458 \vee 2367 = 12345678$

et son inverse = 0

Par conséquent : la relation Bis (B) conserve l'ensemble des rapports du losange opératoire dans l'addition et la multiplication logiques .

En d'autres termes : le losange central d'ordre II, qui est en totalité le produit additif et multiplicatif du bi-losange d'ordre I, peut être considéré comme un sous-système dans une structure déductive unique qu'il forme avec le bi-losange; structure de $42 + 16 = 58$ opérations .

Etant donnée n'importe quelle opération directe d'ordre I ou VII, la totalité des 57 opérations restantes peut en être déduite, avec les rapports de groupe et d'emboîtement qui les définissent .

L'opération 13 est engendrée à partir du bi-losange par l'addition de l'op. 1 et de la contraire de sa B $(Tb) = 3 : 1 \vee 3 = 13$.
 Cette formule : $(x \vee Tb)$, prise sur le bi-losange, est généralisable à l'ensemble des opérations du losange constructible à partir de l'opération 13 .

Pour $x = 1$, si $13 = (x \vee Tb)$

$R = (Rx \vee Tb) = 8 \vee 6 = 68$

$T = (Tx \vee Tb) = 4 \vee 2 = 24$

$F = (Fx \vee Tb) = 5 \vee 7 = 57$

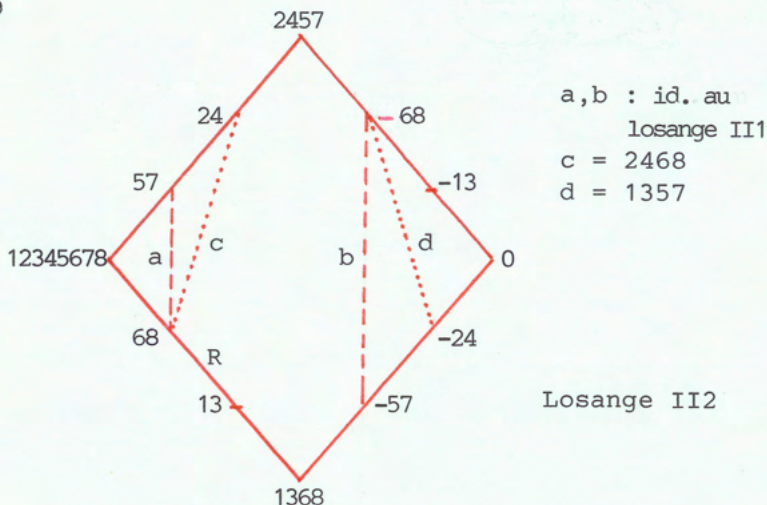
La série des inverses s'ensuit par simple application du signe - .

Les médiatives de R peuvent être engendrées par addition (ou multiplication) des couples de réciproques d'ordre II (ou de leurs inverses d'ordre VI), ou bien par la formule générale du losange .

Ainsi sur le losange d'ordre I construit à partir de l'opération (1), les médiatives de R sont 18 et 45 .

Si $x = 18$, $(x \vee Tb) = 18 \vee 36 = 1368$

$(Tx \vee Tb) = 45 \vee 27 = 2457$

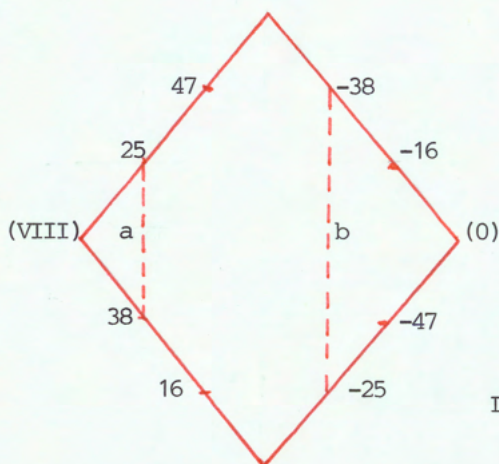


Les médiatives de T et de F seront produites de la même façon (voir schéma page 46 et tableau des combinaisons pages 49 et 51) :

si $x = 14$,	$(x \vee Tb) = 14 \vee 23 = 1234$	méd. de T
	$(Rx \vee Tb) = 58 \vee 67 = 5678$	
si $x = 15$,	$(x \vee Tb) = 15 \vee 37 = 1357$	méd. de F
	$(Rx \vee Tb) = 48 \vee 26 = 2468$	

La formule s'applique encore aux complétives :

si $x = 1458$, $(x \vee Tb) = 1458 \vee 2367 = 12345678$,
 dont l'inverse = 0 .



$$\begin{array}{l} a = 2358 \\ b = 1467 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{méd. T} \end{array} \right.$$

méd. F = id. au
losange II1

méd. R = id. au
losange II2

Losange II3

L'opération (16) sera produite par l'addition de l'opération (1) et de la réflexe de sa B (Fb) :

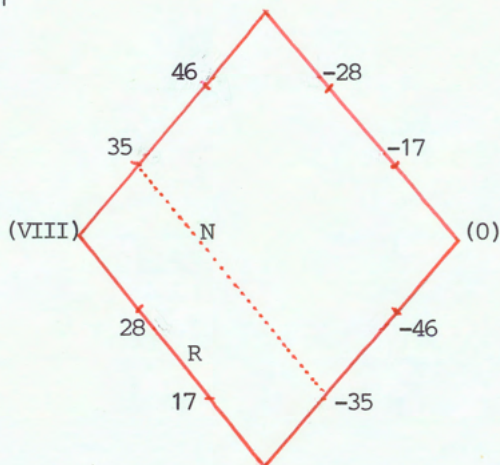
$$1 \vee 6 = 16 .$$

La formule $(x \vee Fb)$ est généralisable à l'ensemble du losange constructible à partir de l'opération (16), sur fond de bi-losange .

L'opération (17) sera produite par l'addition de l'opération (1) et de la réciproque de sa B (Rb) :

$$1 \vee 7 = 17 .$$

La formule $(x \vee Rb)$ est généralisable à l'ensemble du losange constructible à partir de l'opération (17), sur fond de bi-losange .



méd. T = id. au
losange II3

méd. F = id. au
losange II2

méd. R = id. au
losange II1

Losange II4

Ainsi, les 4 losanges centraux d'ordre II sont, par rapport à la formule de réunion disjonctive $(x \vee B)$, les éléments d'un groupe de 4 transformations IRTF :
pour x = une opération du bi-losange [par ex. (1)],
si I est appliquée à $(x \vee B)$, qui produit II1

T donne $(x \vee Tb)$, qui produit II2

F donne $(x \vee Fb)$, qui produit II3

R donne $(x \vee Rb)$, qui produit II4 .

La totalité des opérations d'ordre II et de leurs inverses d'ordre VI est désormais représentée : soit dans le bi-losange au titre de médiatives, soit dans l'un des 4 losanges simples d'ordre II . En raison du groupe ITFR de génération de ces losanges centraux, par rapport à l'addition (v B) calculée sur le bi-losange, nous pouvons déduire n'importe lequel de ces losanges à partir de n'importe quelle opération directe du bi-losange . Ces 5 structures composent donc ensemble un système unique de 88 opérations .

Les opérations d'ordre III et leurs inverses d'ordre V sont, les unes et les autres, au nombre de 56 . Une opération d'ordre III peut être produite par la réunion disjonctive de trois opérations d'ordre I, par ex. : $1 \vee 2 \vee 3 = 123$

En choisissant ce type de construction, nous pouvons aisément définir un type de symétrie génératrice pour chaque nouvelle série d'opérations: nous la déduirons ainsi à partir du bi-losange primitif selon la formule de cette symétrie, à l'instar des opérations d'ordre II .

L'opération (123) est le produit additif d'une opération directe (1), de sa B (2) et de sa Tb (3) . Dès lors, l'ensemble des rapports de groupe et d'emboîtement dont elle sera l'initiatrice se définiront, à partir du bi-losange d'ordre I, selon la même formule : $(x \vee B \vee Tb)$

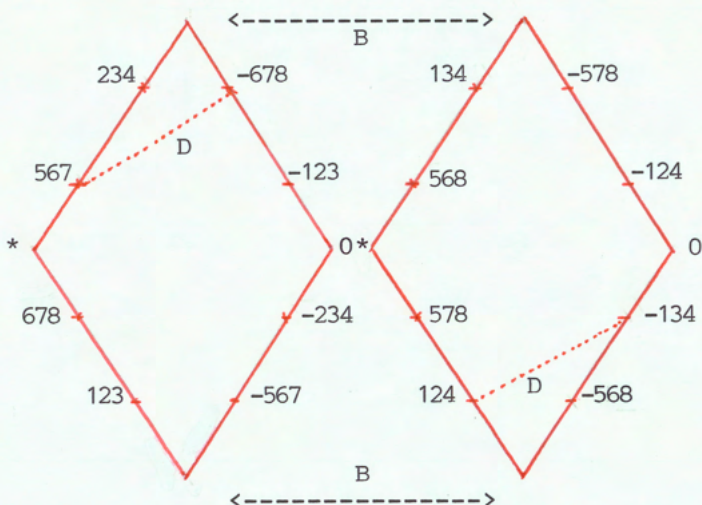
formule valable pour la série des opérations inverses du moment que l'inverse de x est noté $-x$.

$$R = R(x \vee B \vee Tb) = (Rx \vee B \vee Tb) = 678$$

$$T = T(x \vee B \vee Tb) = (Tx \vee B \vee Tb) = 234$$

et ainsi de suite .

Losange double III1



méd. de T : identiques au losange III1 .

méd. de R et de F : mêmes opérations que sur le bi-losange, avec inversion du sens positif ou négatif . D'où il résulte que les complétives sont 12345678 (notée $*$) et 0 :

123678 v 234567 = 12345678
 (ou: $-18 \cdot -45 = -0 = 12345678$)
 18 . 45 = 0
 (ou: -234657 v $-123678 = -12345678 = 0$)
 et ainsi de suite .

losange
 de
 gauche:
 méd. de R

Les deux losanges, bien que liés par la transformation B dans les mêmes conditions que le bi-losange, ne formeront donc qu'un "losange double" puisqu'ils ne fusionnent plus dans l'opération commune 2367 .

Noter toutefois que les complétives du bi-losange (1458 et 2367) se retrouvent (avec inversion du sens positif et négatif) si les méd. de R des opérations d'ordre III sont réunies conjonctivement : $123678 \cdot 234567 = 2367$

ou bien si les méd. de R d'opérations d'ordre VI sont réunies disjonctivement :

$$18 \vee 45 = 1458$$

Pour le losange de droite on trouvera respectivement 1458 en complétive positive et 2367 en complétive négative : réapparition, donc, d'une opération commune = 1458 .

Cet effet de réflexion dirigée vers le bi-losange est un caractère important du losange double .

Il réapparaît dans la combinaison d'une opération directe avec les méd. de R . Au lieu que cette composition soit tautologique, elle devient féconde quand l'opération est composée avec celle d'entre les médiatives qui enveloppe sa D et sa V :
par ex. 123, combinée avec celle des méd. qui l'enveloppe directement ne produit que la répétition de cette dernière (par v) ou d'elle-même (par .);

mais combinée avec la méd. de -234 et -567 = -234567 = 18, elle produit soit l'opération 1 du bi-losange, soit une nouvelle opération :

$$123 \cdot 18 = 1$$

$$123 \vee 18 = 1238$$

De même pour l'opération 678 :

$$678 \cdot 18 = 8$$

$$678 \vee 18 = 1678$$

et ainsi de suite .

L'effet de réflexion vers le bi-losange se manifeste encore dans la composition des opérations concordantes (D). Dans un losange d'ordre I ou II cette composition est tautologique: elle redonne soit la directe, soit la D . Dans le losange double III1 la composition des D est féconde:

par ex. $234 \vee 45678 [-123] = 2345678 [-1]$

$$234 \cdot 45678 = 4$$

Les opérations -1 et 4 du bi-losange sont également des concordantes (D) .

$$578 \vee 12347 [-568] = 1234578 [-6]$$

$$578 \cdot 12347 = 7$$

Les opérations -6 et 7 du bi-losange sont également des concordantes (D) .

et ainsi de suite .

Par conséquent : si deux opérations concordantes (D) ont des Bornes supérieure et inférieure, ces dernières sont également des concordantes (D) .

La combinaison d'une opération directe avec sa Db s'avère également féconde :

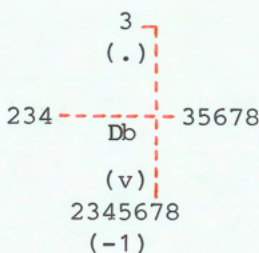
par ex . $234 \vee 35678 [-124] = 2345678 [-1]$

$$234 \cdot 35678 = 3$$

Les opérations -1 et 3 du bi-losange sont également des Db .

Et ainsi de suite .

Par conséquent : si deux opérations en relation Db ont des Bornes supérieure et inférieure, ces dernières sont également des Db .



Comme le bi-losange, le losange double admet des losanges centraux obtenus par la réunion des opérations en relation B, Tb, Fb et Rb .

Cette réunion toutefois se déroule d'une manière inverse à celle du bi-losange .

En effet, l'addition des opérations de l'ordre le plus faible (III) en relation B, produit dans tous les cas un élément du couple d'inverses: 1234/5678, déjà connues comme médiatives de T, et pour lesquelles : $I = T, V, C$

$$N = D, F, R$$

(voir tableau pages 49 et 51)

Par contre la multiplication des opérations de l'ordre le plus faible (ou l'addition de celles de l'ordre le plus élevé) en relation B, permet la recomposition du losange II1 :

$$123 \cdot 124 = 12$$

$$678 \cdot 578 = 78$$

et ainsi de suite pour les autres couples de B .

La même inversion du mode de composition régit la reproduction du losange II2 :

$$123 \cdot 134 = 13$$

$$234 \cdot 124 = 24$$

et ainsi de suite pour les autres couples de Tb .

En revanche le losange II3 sera réengendré par la formule issue du bi-losange (x v Fb) à partir de l'ordre le plus faible :

$$123 \vee 568 = 123568 \quad (-47)$$

$$678 \vee 134 = 134678 \quad (-25)$$

et ainsi de suite pour les autres couples de Fb .

Cependant la formule ne produit plus directement

les opérations d'ordre II mais la série de leurs inverses .

Le losange II4 sera reproduit dans les mêmes conditions que le losange II3 : application de la formule $(x \vee Rb)$, pour obtenir directement la série des opérations d'ordre VI :

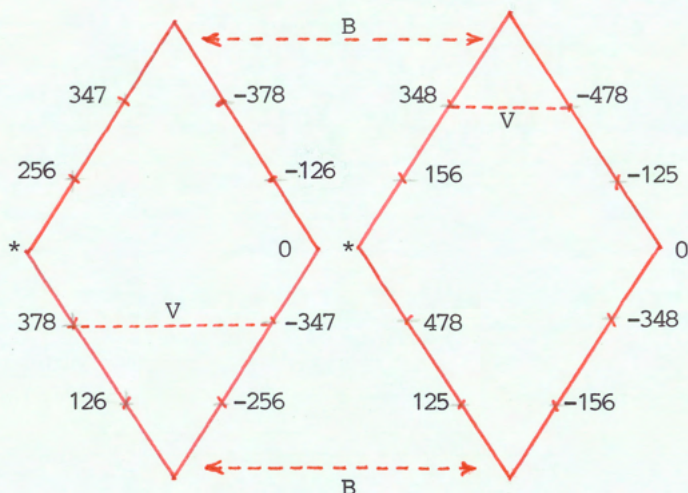
$$123 \vee 578 = 123578 \quad (-46)$$

$$678 \vee 124 = 124678 \quad (-35)$$

et ainsi de suite pour les autres couples de Rb .

Ainsi se confirme l'isomorphisme du bi-losange et du losange double à travers la réflexion par le second de la série des structures d'emboîtement produite à partir du premier .

Losange double III2



A partir du bi-losange, formule: $(x \vee B \vee Fb)$
 Méd. de R = mêmes opérations que le bi-losange
 " T = " "
 " F = mêmes opérations que le losange II1

Réflexion des losanges d'ordre II: si (x) est une opération d'ordre III :

II1 : $x \cdot B$

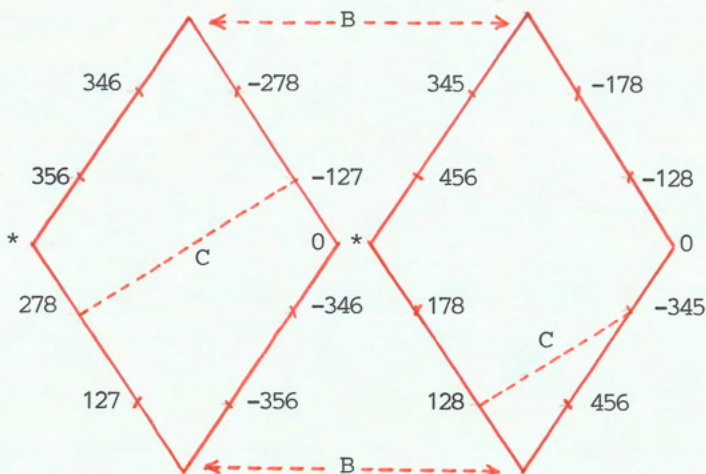
II3 : $x \cdot Fb$

II2 : $x \vee Tb$

II4 : $x \vee Rb$

La composition des V d'une part, des Vb d'autre part, est féconde et réflexive: l'une et l'autre reproduisent les opérations du bi-losange .

Losange double III3



A partir du bi-losange, formule : $(x \vee B \vee Rb)$

Méd. de T = mêmes opérations que le bi-losange

" F = " "

" R = mêmes opérations que le losange II1

Réflexion des losanges d'ordre II: si (x) est une opération d'ordre III :

II1 : $x \cdot B$

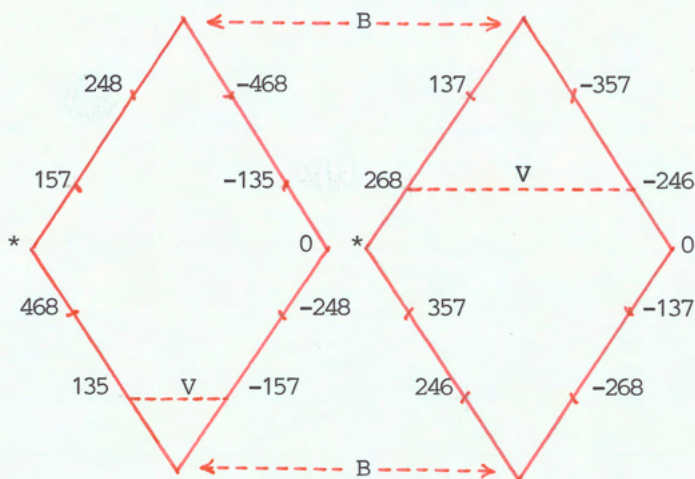
II3 : $x \vee Fb$

II2 : $x \vee Tb$

II4 : $x \cdot Rb$

La composition des C d'une part, des Cb d'autre part, est féconde et réflexive: l'une et l'autre reproduisent les opérations du bi-losange .

Losange double III4



A partir du bi-losange, formule: $(x \vee F \vee Tb)$
 Méd. de T = mêmes opérations que le bi-losange

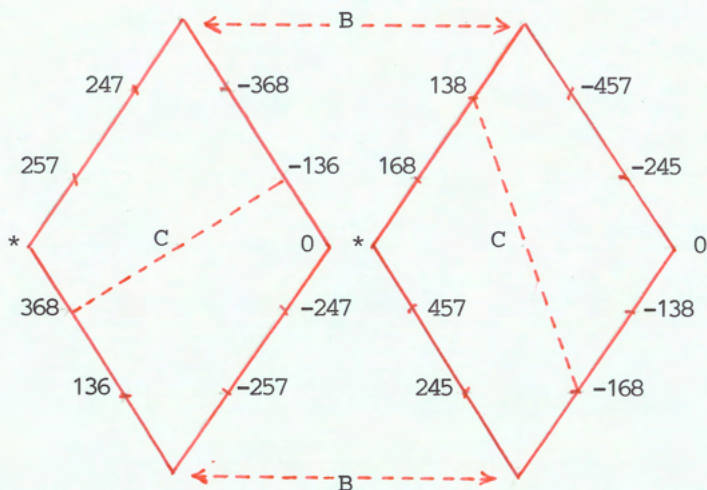
"	F =	"	"
"	R =	"	"

Réflexion des losanges d'ordre II: si (x) est une opération d'ordre III :

II1 : $x \vee B$	II3 : $x \vee Fb$
II2 : $x \cdot Tb$	II4 : $x \cdot Rb$

La composition des V reproduit les opérations du bi-losange, celle des Vb les opérations du losange II3 .

Losange double III5



A partir du bi-losange, formule : $(x \vee Tb \vee Fb)$

Méd. de T = mêmes opérations que le bi-losange

" F = " "

" R = mêmes opérations que le losange II2

Réflexion des losanges d'ordre II: si (x) est une opération d'ordre III :

II1 : $x \vee B$

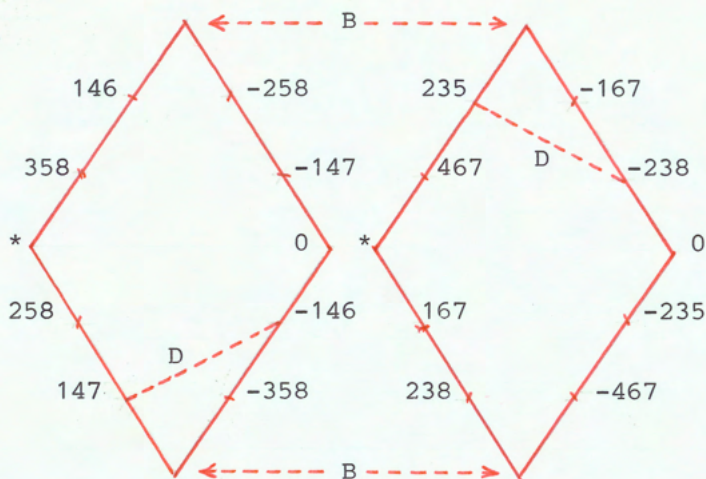
II3 : $x \cdot Fb$

II2 : $x \cdot Tb$

II4 : $x \vee Rb$

La composition des C reproduit les opérations du bi-losange, celle des Cb les opérations du losange II4 .

Losange double III6



A partir du bi-losange, formule : $(x \vee T \vee Rb)$
 Méd. de T = mêmes opérations que le bi-losange

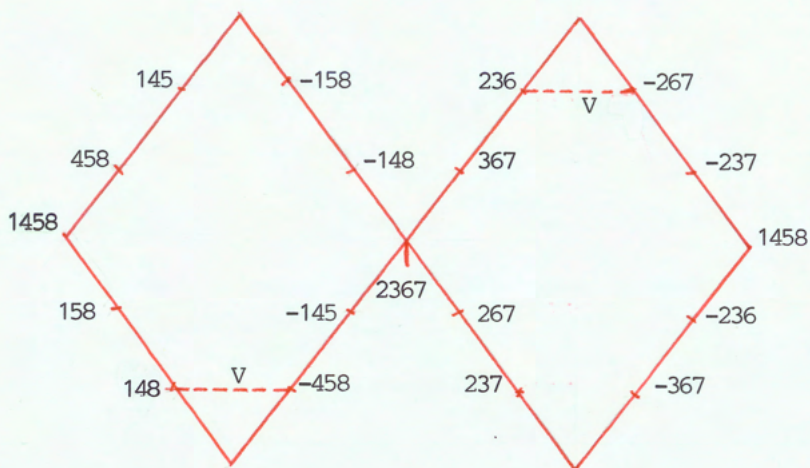
"	F =	"	"
"	R =	"	"

Réflexion des losanges d'ordre II: si (x) est une opération d'ordre III :

II1 : $x \vee B$	II3 : $x \cdot Fb$
II2 : $x \vee Tb$	II4 : $x \cdot Rb$

La composition des D reproduit les opérations du bi-losange, celle des Db les opérations du losange II2 .

Bi-losange III



A partir du bi-losange I, formule: $(x \vee T \vee R)$
Méd. de T, F, R = mêmes opérations que les complé-
tives : 1458/2367 , qui sont aussi les complétives
du bilosange I . La substitution des (.) aux (v)
permet de retrouver les médiatives du bi-losange .
Réflexion des losanges d'ordre II: si (x) est une
opération d'ordre III :

II1 : x v B

II3 : x v Fb

II2 : x v Tb

II4 : x v Rb

La composition des V reproduit les opérations du
bilosange I, celle des V_b les opérations du losange
II3 .

Toutes les opérations d'ordre III sont désormais utilisées . Elles peuvent être produites en totalité à partir du bi-losange à l'aide des formules suivantes :

si (x) est une opération d'ordre I :

$(x \vee B \vee Tb)$	:	losange double	III1
$(x \vee B \vee Fb)$	:	" "	III2
$(x \vee B \vee Rb)$	:	" "	III3
$(x \vee Tb \vee F)$	:	" "	III4
$(x \vee Tb \vee Fb)$	:	" "	III5
$(x \vee T \vee Rb)$	:	" "	III6
$(x \vee T \vee R)$	:	" "	III7

Sous cette condition, la totalité des opérations d'ordre I, II, III et leurs inverses, ainsi que les opérations d'ordre IV qu'elles utilisent à titre de médiatives ou complétives, composent ensemble un seul système déductif de 200 opérations dont l'unité de structure est le losange opératoire.

Cependant le maintien pour les opérations d'ordre III de cette structure mixte de groupe et d'emboîtement qu'est le losange, ne présente pas un intérêt proprement déductif: à cet égard le sous-ensemble constitué par le groupe des 16 transformations suffirait . Son intérêt reste d'introduire dans

la construction un caractère puissamment réfléchissant .

Le système régulier des emboîtements permet en effet, à partir de n'importe lequel des 7 groupes d'opérations d'ordre III et de leurs inverses,

- d'une part de réintroduire directement les opérations médiatives du bi-losange I (ou des losanges II1, II2; ou mêmes les complétives particulières du bi-losange I)

- d'autre part de reproduire sous forme de médiatives originales, autant les opérations directes du bi-losange I que celles des 4 losanges d'ordre II .

L'unité formelle du système apparaît ainsi comme un caractère essentiel de l'ensemble opératoire, abstraction faite de sa signification dans la combinaison concrète des jugements .

Les opérations d'ordre IV déjà utilisées comme médiatives ou complétives dans les précédents losanges sont les suivantes :

- complétives (et médiatives) : 1458, 2367
- médiatives de R : 1278, 1368, 2457, 3456
- médiatives de F : 1234, 1467, 2358, 5678
- médiatives de T : 1256, 1357, 2468, 3478

Toutes ces opérations sont ordonnées par les transformations du groupe fondamental de 16, réduit à un couple d'inverses .

Par ex. si 1234 porte la transformation I :

$$I = T = B = Tb$$

$$N = R = F = Rb = Fb$$

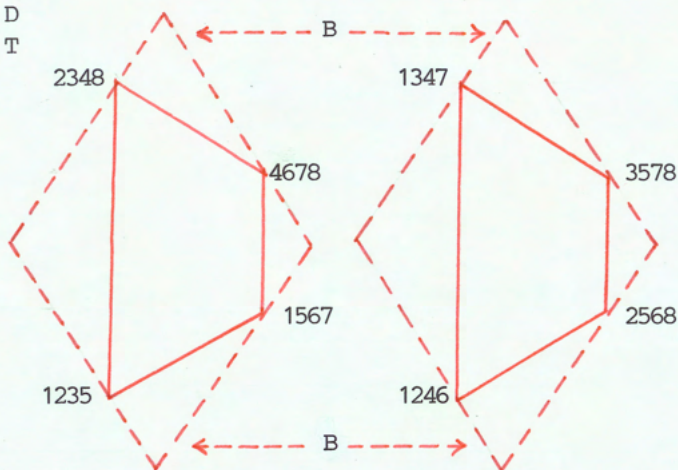
Si I s'applique à 1357 :

$$I = F = Tb = Rb$$

$$N = R = T = B = Fb$$

Les opérations d'ordre IV sont au nombre de 70 .
Il en reste donc 56 .

$R = N$
 $C = I$
 $F = D$
 $V = T$



A partir du bi-losange I, formule: $(x \vee B \vee Tb \vee F)$

Deux groupes INTD en relation B

Méd. de T : mêmes opérations que le bi-losange I

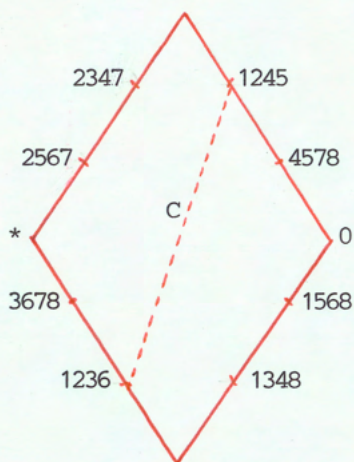
Réflexion des losanges d'ordre II selon les procédures habituelles, cette fois sous les deux formes additive et multiplicative :

par ex. :

$x \vee B$	losange III1
$x \cdot B$	

$$B = C$$

A partir du bi-losange
I, formule :
(x v B v Tb v Fb)



$$\begin{aligned} \text{Tb} &= \text{V} \\ \text{Fb} &= \text{D} \\ \text{Rb} &= \text{N} \end{aligned}$$

Méd. de R, T, F : mêmes opérations que le bi-losange I.

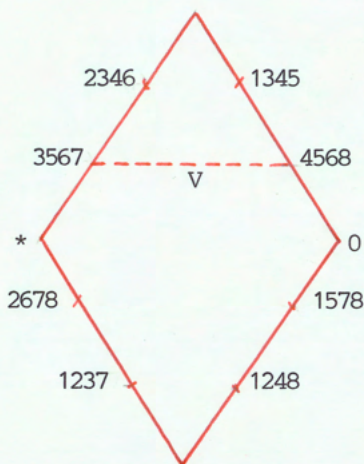
La composition des V, D, C est féconde et réflexive du fait qu'elle est identique aux formules génératrices des losanges d'ordre II .

Par exception la composition du losange II4 est impossible puisque $\text{Rb} = \text{N}$.

$$B = V$$

A partir du bi-losg. I,
formule :

$$(x \vee B \vee Tb \vee Rb)$$



$$Tb = C$$

$$Fb = N$$

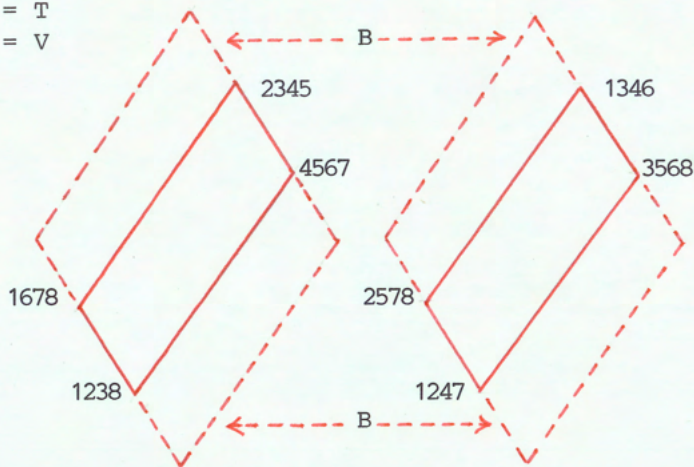
$$Rb = D$$

Méd. de R, T, F : mêmes opérations que le bi-losg. I .

La composition des V, D, C est féconde et rélexive
puiqu'elle est identique aux formules génératrices
des losanges d'ordre II .

Par exception la composition du losange II3 est
impossible puisque $Fb = N$.

$R = D$
 $N = F$
 $C = T$
 $I = V$



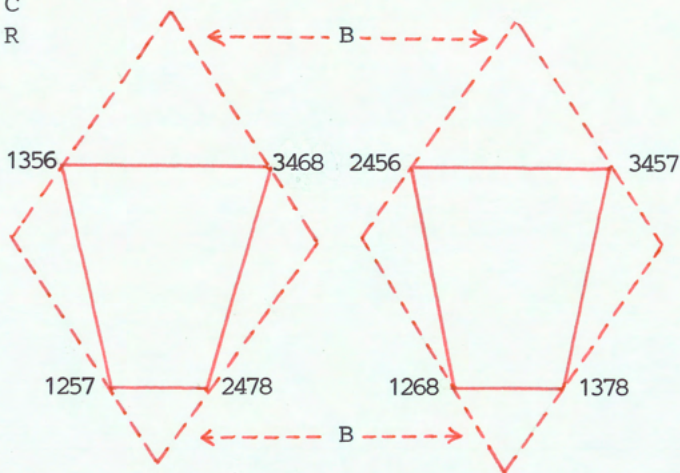
A partir du bi-losg. I, formule: $(x \vee B \vee Tb \vee R)$

Deux groupes INRC en relation B

Méd. de R : mêmes opérations que le bi-losange I .

Rélexion des losanges d'ordre II : formules usuelles
sous les 2 formes additive et multiplicative .

$I = D$
 $N = T$
 $F = C$
 $V = R$

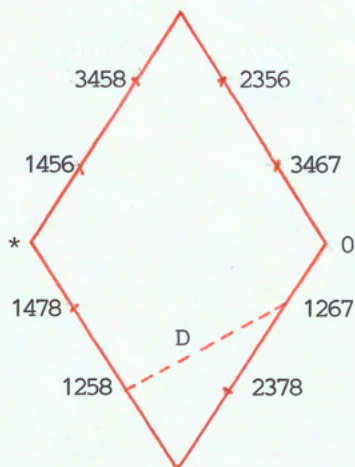


A partir du bi-losange I, formule: $(x \vee B \vee F \vee Rb)$

Deux groupes INFV en relation B

Méd. de F = mêmes opérations que le bi-losg. I .

Les 4 losanges d'ordre II sont reproduits par les formules usuelles, sous les deux formes additive et multiplicative .



$$B = D$$

A partir du bi-
losange I,

formule :

$$(x \vee B \vee F \vee R)$$

$$Tb = N$$

$$Fb = C$$

$$Rb = V$$

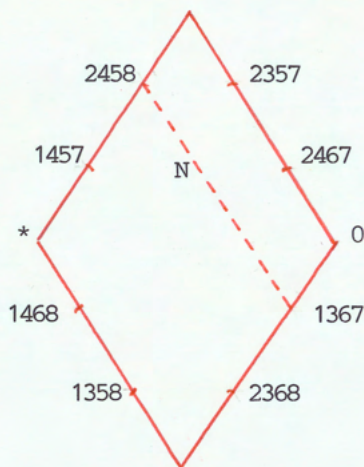
Méd. de R, T, F : mêmes opérations que le bi-losange I .

La composition des V, D, C est féconde et réflexive puisqu'elle s'identifie avec les formules génératrices des losanges d'ordre II .

Par exception le losange II2 ne peut être reproduit car $Tb = N$.

$$B = N$$

A partir du bi-
losange I,
formule :
(x v Tb v F v R)



$$Tb = D$$

$$Fb = V$$

$$Rb = C$$

Méd. de R, T, F : mêmes opérations que le bi-losange I .

La composition des V, D, C est féconde et réflexive puisqu'elle équivaut à la reproduction des losanges d'ordre II .

Par exception le losange III1 ne peut être recomposé puisque $B = N$.

Les opérations restantes d'ordre IV sont ainsi constructibles à l'aide d'un petit nombre de formules additives à partir du bi-losange I :

- (x v B v Tb v F) : double groupe INTD
- (x v B v Tb v Fb) : groupe de 8 (C = B)
- (x v B v Tb v Rb) : groupe de 8 (V = B)
- (x v B v Tb v R) : double groupe INRC
- (x v B v F v Rb) : double groupe INFV
- (x v B v F v R) : groupe de 8 (D = B)
- (x v Tb v F v R) : groupe de 8 (N = B)

La construction des opérations ternaires suppose donc :

- les règles du losange binaire
- leur composition avec la transformation nouvelle Bis (B) dont la fonction est de construire un double du losange par reproduction d'une opération prise comme support de la transformation identique
- les 4 formules additives simples des losanges d'ordre II
- les 7 formules additives doubles des groupes d'ordre III
- les 7 formules additives triples des groupes d'ordre IV .

Les 256 opérations composent dès lors un unique système déductif et réflexif dans lequel les rapports de groupe, et ceux d'entre les rapports d'emboîtement qui leur sont subordonnés, sont automatiquement déterminés par application des règles et des formules .

Le losange logique est le neurone de la pensée bivalente . La connaissance de cette cellule infra-mentale est solidaire d'une analyse qui fait porter l'abstraction sur les opérations logiques en tant que symboles de connexions propositionnelles . Ainsi, une fois posé le système de traduction de ces symboles (relativement) concrets en série chiffrée nous n'avons eu besoin d'écrire aucune opération ternaire. Nous aurions même pu ignorer que nous manipulions des symboles de liaisons entre énoncés vrais ou faux .

La théorie des structures logiques rend nécessaire cette abstraction formalisante à l'égard des opérations prises dans leur signification psycho/logique interpropositionnelle . Grâce à quoi elle en purifie les règles de combinaisons et de transformations : chimie opératoire .

Grâce à quoi elle donne un sens et fournit des règles à la construction infinie des systèmes de transformations propositionnelles; ce que nous allons maintenant examiner .

Structuration infinie

STRUCTURATION
DES
OPERATIONS QUATERNAIRES

Ces opérations combinent 4 propositions selon les valeurs du vrai et du faux . Elles sont au nombre de 65536 (256^2) .

Leur table de vérité (matrice bivalente) forme une série de 16 cases (le double du système précédent).

La signification interpropositionnelle de ces opérations n'est pas l'objet de notre analyse, qui a pour visée les règles de transformations capables d'ordonner ces opérations en des totalités objectives. A ces opérations sont donc substitués des symboles numériques ordinaux référés à leur matrice bivalente et ce sont ces symboles qui deviennent l'objet direct de l'analyse .

La signification de ces n° sera retrouvée par le lexique suivant :

1 = (p.q.r.s)	9 = ($\bar{p}$.q.r.s)
2 = (p.q.r. $\bar{s}$)	10 = (p.q.r. $\bar{s}$)
3 = (p.q. $\bar{r}$.s)	11 = ($\bar{p}$.q. $\bar{r}$.s)
4 = (p.q. $\bar{r}$. $\bar{s}$)	12 = ($\bar{p}$.q. $\bar{r}$. $\bar{s}$)
5 = (p. $\bar{q}$.r.s)	13 = ($\bar{p}$. $\bar{q}$.r.s)
6 = (p. $\bar{q}$.r. $\bar{s}$)	14 = ($\bar{p}$. $\bar{q}$.r. $\bar{s}$)
7 = (p. $\bar{q}$. $\bar{r}$.s)	15 = ($\bar{p}$. $\bar{q}$. $\bar{r}$.s)
8 = (p. $\bar{q}$. $\bar{r}$. $\bar{s}$)	16 = ($\bar{p}$. $\bar{q}$. $\bar{r}$. $\bar{s}$)

L'opération (3/7/15) par ex. signifiera donc,
en forme normale disjonctive :

$$(p.q.\bar{r}.s) \vee (p.\bar{q}.\bar{r}.s) \vee (\bar{p}.\bar{q}.\bar{r}.s)$$

OPERATIONS D'ORDRE I et XV

Les opérations d'ordre I sont celles qui sont vraies pour un seul des n° de groupements conjonctifs désignés par le lexique: elles sont donc au nombre de 16 . Les opérations d'ordre XV sont leurs inverses (N) .

En vertu des règles antérieures, les relations de groupe qui s'instaurent entre elles sont, au minimum, les suivantes :

	(v)	(w)	(y)	(z)	
	1	8	9	16	B
	2	7	10	15	
	3	6	11	14	B
	4	7	12	13	
(V)	I	T	F	R	
(W)	T	I	R	F	
(Y)	F	R	I	T	
(Z)	R	F	T	I	

Tableau qui se lit ainsi :

Colonne verticale (v), distribution horizontale (V):
ITFR . Tous les T des éléments (v) sont symétriques
sur la colonne verticale (w); tous les F sur la
verticale (y), etc.

par ex. F de 3 = 11

R de 4 = 13

Colonne verticale (y), distribution horizontale (Y):
FRIT . Par ex . F de 12 = 4

T de 9 = 16

La relation entre les opérations inverses est similaire : il suffit de lire -1 au lieu de 1, -5 au lieu de 5, etc.

La transformation Bis (B) permettait la reproduction isomorphe du losange pour les opérations ternaires. L'hypothèse d'une transformation équivalente peut être tentée pour les quaternaires .

Bis se définit comme une réciprocation par couples d'éléments de la matrice bivalente, avec conservation de l'ordre de succession de ces couples .

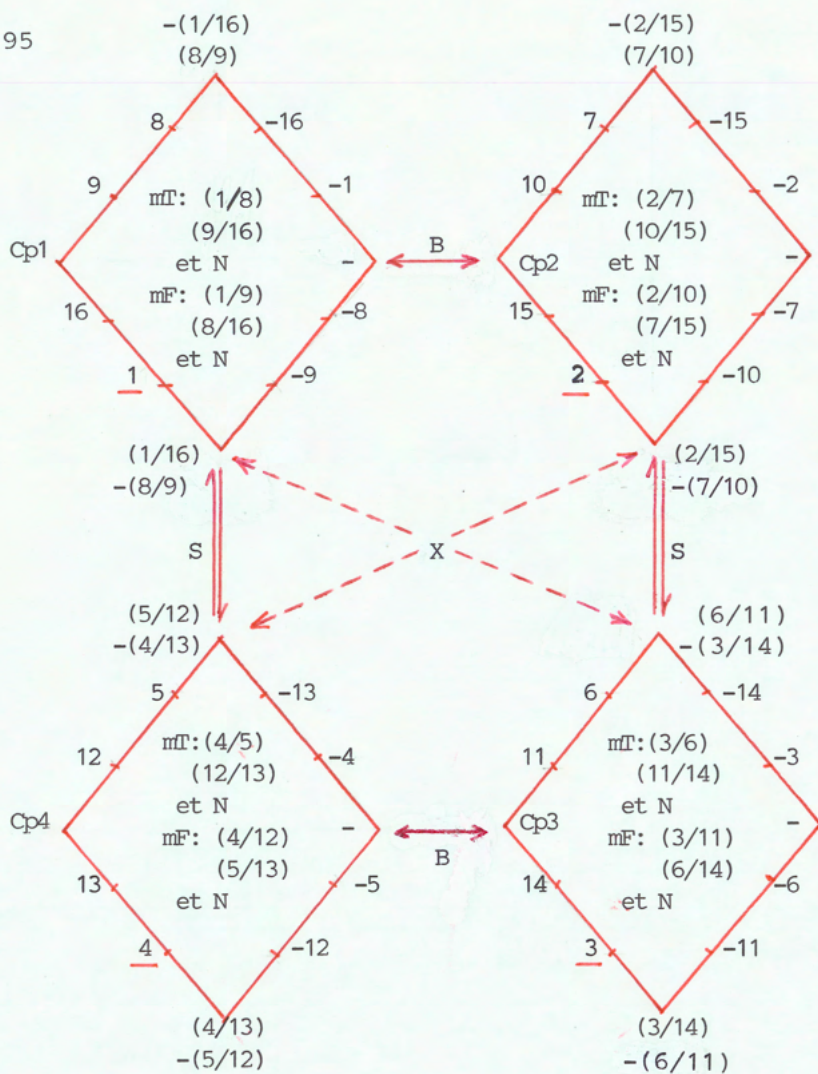
Supposons une réciprocation par paquets de 4 éléments de la matrice, avec conservation de l'ordre général:

$$\begin{array}{l} \text{S} \left\{ \begin{array}{l} 1000 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \quad (1) \\ 0001 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \quad (4) \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{S} \left\{ \begin{array}{l} 1001 \ 0001 \ 1110 \ 0100 \quad (1/4/8/9/10/11/14) \\ 1001 \ 1000 \ 0111 \ 0010 \quad (1/4/5/10/11/12/15) \end{array} \right. \end{array}$$

Appelons (S) cette transformation Bis adaptée aux opérations quaternaires .

Dès lors, l'ensemble des transformations connues et cumulées depuis les opérations binaires, permet



de calculer les quatre losanges ci-contre, dont la réunion sera synthétisée en un groupe commutatif général de 32 transformations, par adjonction de la transformation croisée X :

X, définition : - division de la table en séries de quatre éléments
 - chaque série exécute à l'intérieur d'elle-même la transformation F

	1000 0000 0000 0000	(1)
X	0010 0000 0000 0000	(3)
	1000 0001 1000 0001	(1/8/9/16)
X	0010 0100 0010 0100	(3/6/11/14)

Cp1 = (1/8/9/16) et N	Cp2 = (2/7/10/15) et N
Cp4 = (4/5/12/13) et N	Cp3 = (3/6/11/14) et N

Toutes les opérations occupant la même position relative sur les losanges (1) et (2) d'une part, (3) et (4) d'autre part, sont liées par la transformation B .

Toutes les opérations occupant la même position relative sur les losanges (1) et (4) d'une part, (2) et (3) d'autre part, sont liées par la transformation S .

Toutes les opérations occupant la même position relative sur les losanges (1) et (3) d'une part, (2) et (4) d'autre part, sont liées par la transformation X .

Les transformations S et X sont équivalentes à B sous le rapport de la reproduction du groupe fondamental INRCTDFV .

La table générale du groupe commutatif de 32 transformations qui gère les opérations d'ordre I et XV, s'obtiendra donc en ajoutant simplement à la table du groupe de 16 (page 50) les modules convenables, à l'exemple du module généré par la transformation B .

Module S : S Ns Rs Cs Ts Ds Fs Vs

Module X : X Nx Rx Cx Tx Dx Fx Vx

Il suffira pour la logique de donner le tableau de ces modules transformationnels :

	I	B	S	X
I	I..... : :	B..... : :	S.....	X.....
B	B..... : :	I..... : :	X	S
S	S	X	I	B
X	X	S	B	I

Groupe commutatif des 4 modules transforma-
tionnels à groupes de 8 (INRCTDFV ou
isomorphes)

En rayures : modules des op. ternaires (p. 50)

Les modules I, B, S, X ont la même puissance :
il s'établit entre chacun et n'importe quel autre
une correspondance univoque et réciproque .
L'équivalence des modules se transfère aux losanges
opérateurs d'ordre I-XV qu'ils gouvernent: il
s'établit entre chacun et n'importe quel autre une
correspondance univoque et réciproque .

L'évidage de la table par sa réduction aux modules transformationnels rend manifeste la différenciation (qualitative) entre deux classes de transformations: I, B, S, X sont à la fois des transformations simples du groupe des 32 (INRCTDFV BNbRbCbTbDbFbVb SNsRsCsTsDsFsVs XNxRxCxTxDxFxVx) et des transformations reproductrices de simples, c.a.d. génératrices de modules de 8 (I.... B..... S..... X.....) et par voie de conséquence de losanges.

Classe (1) : transformations simples ou directes

Classe (2) : transformations [re]productrices de groupes ou losanges

Le groupe commutatif des 4 modules IBSX est un groupe de transformations de la classe (2), dont les éléments ne sont plus des transformations simples mais des groupes de transformations.

Traduit en termes de n° d'ordre dans la matrice bivalente, l'ensemble des transformations quaternaires se présente ainsi :

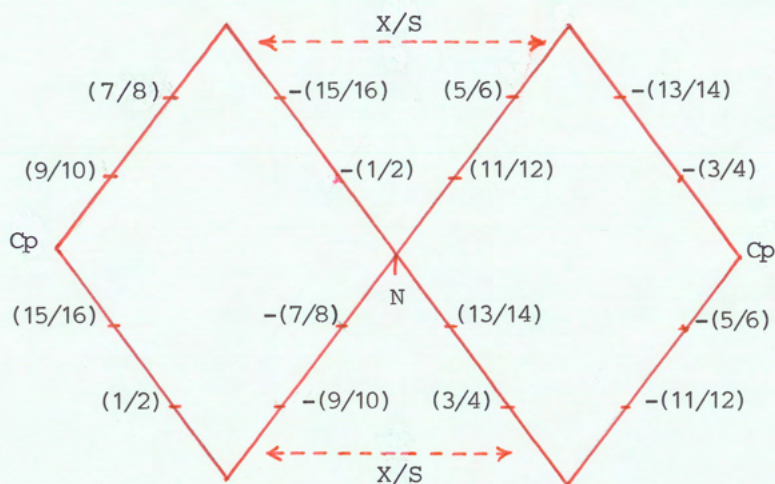
B	X	S	Ts	Tx	Tb	T
1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7	1-8
3-4	2-4	2-3	2-6	2-5	2-8	2-7
5-6	5-7	5-8	3-7	3-8	3-5	3-6
7-8	6-8	6-7	4-8	4-7	4-6	4-5
9-10	9-11	9-12	9-13	9-14	9-15	9-16
11-12	10-12	10-11	10-14	10-13	10-16	10-15
13-14	13-15	13-16	11-15	11-16	11-13	11-14
15-16	14-16	14-15	12-16	12-15	12-14	12-13

F	Fb	Fx	Fs	Rs	Rx	Rb
1-9	1-10	1-11	1-12	1-13	1-14	1-15
2-10	2-9	2-12	2-11	2-14	2-13	2-16
3-11	3-12	3-9	3-10	3-15	3-16	3-13
4-12	4-11	4-10	4-9	4-16	4-15	4-14
5-13	5-14	5-15	5-16	5-9	5-10	5-11
6-14	6-13	6-16	6-15	6-10	6-9	6-12
7-15	7-16	7-13	7-14	7-11	7-12	7-9
8-16	8-15	8-14	8-13	8-12	8-11	8-10

R

1-16	5-12
2-15	6-11
3-14	7-10
4-13	8-9

Ce code se combine avec le code des transformations par changement de valeur, qui consiste en la formule de l'inversion (N)



OPERATIONS D'ORDRE II et XIV :

Plusieurs sont déjà apparues dans le rôle de Média-
tives au sein du Carré de losanges précédent .

Les premières indépendantes coïncident avec les
produits additifs et multiplicatifs des losanges
I(1) et I(2) d'une part, I(3) et I(4) d'autre part
[formule : $x \vee B$, si les N sont écrites avec le
signe -].

Le résultat constitue le bi-losange ci-dessus :
structure isomorphe au bi-losange ternaire, avec
substitution de X (=S) à B .

Méd. R = (1/2/15/16) et (7/8/9/10)		
et N	et N	à gauche
(3/4/13/14) et (5/6/11/12)		à droite
et N	et N	
Méd. F = (1/2/9/10) et (7/8/15/16)		à gauche
et N	et N	
(3/4/11/12) et (5/6/13/14)		à droite
et N	et N	
Méd. T = (1/2/7/8) et (9/10/15/16)		à gauche
et N	et N	
(3/4/5/6) et (11/12/13/14)		à droite
et N	et N	

Cp = (1/2/7/8/9/10/15/16)
N = (3/4/5/6/11/12/13/14)

Toutes les opérations occupant la même position relative sur les deux losanges sont en relation X .

Soit maintenant la structure formée par la composition des losanges I(1) et I(3) d'une part, I(2) et I(4) d'autre part :

Pour I appliqué à $1/3$

R = $14/16$

F = $9/11$

T = $6/8$

Pour I appliqué à $2/4$

R = $13/16$

F = $10/12$

T = $5/7$

Cp = $1/3/6/8/9/11/14/16$

N = $2/4/5/7/10/12/13/15$

Les deux séries, et les losanges qu'elles génèrent, sont liées par la transformation B (=S) dans une structure de bi-losange .

Soit la structure formée par la composition des losanges I(1) et I(4) d'une part , I(2) et I(3) d'autre part :

Pour I appliqué à $1/4$

R = $13/16$

F = $9/12$

T = $5/8$

Pour I appliqué à $2/3$

R = $14/15$

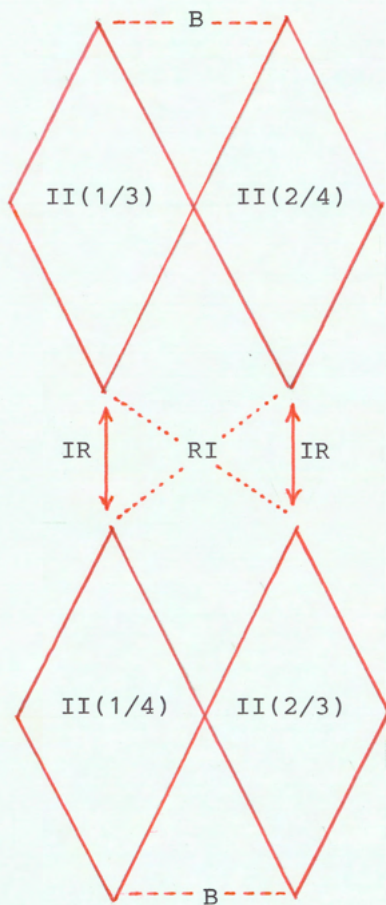
F = $10/11$

T = $6/7$

Cp = $1/4/5/8/9/12/13/16$

N = $2/3/6/7/10/11/14/15$

Le deux séries, et les losanges qu'elles génèrent, sont liées par la transformation B (=X) dans une structure de bi-losange .



Les deux bi-losg.
précédents composent
un carré de bi-losg.
par adjonction des
transformations
IR et RI .

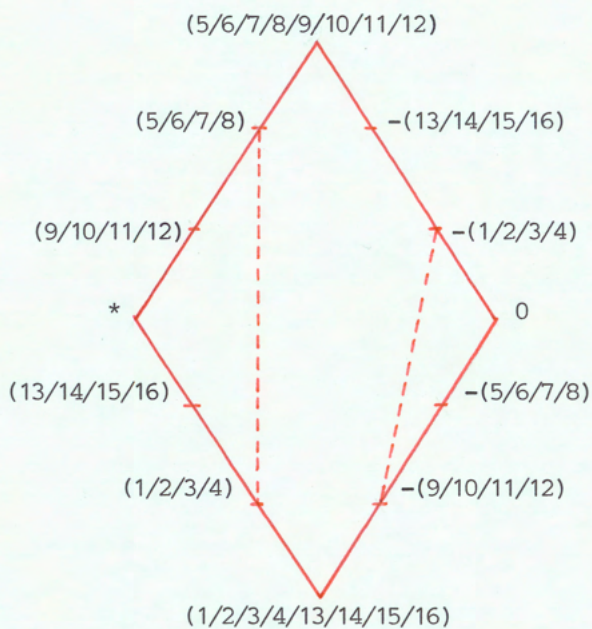
10 10 01 01 10 10 01 01		IR
I R R I I R R I		
10 01 10 01 10 01 10 01		

01 01 10 10 01 01 10 10		RI
R I I R R I I R		
10 01 10 01 10 01 10 01		

L'examen du code général des transformations augmenté de IR et RI montre qu'à partir d'une opération indépendante quelconque d'ordre II nous pourrions ainsi composer un bi-losange ou un carré de losanges. Il y aura bi-losange simple si les n° qui symbolisent l'opération se suivent et correspondent aux 2 cases d'un couple; il y aura carré de losanges dans les autres cas .

Les Bornes Supérieures/Inférieures des opérations qui composent chacun des 3 bi-losanges précédents se combinent toutes en un unique losange "central" isomorphe à un losange binaire .

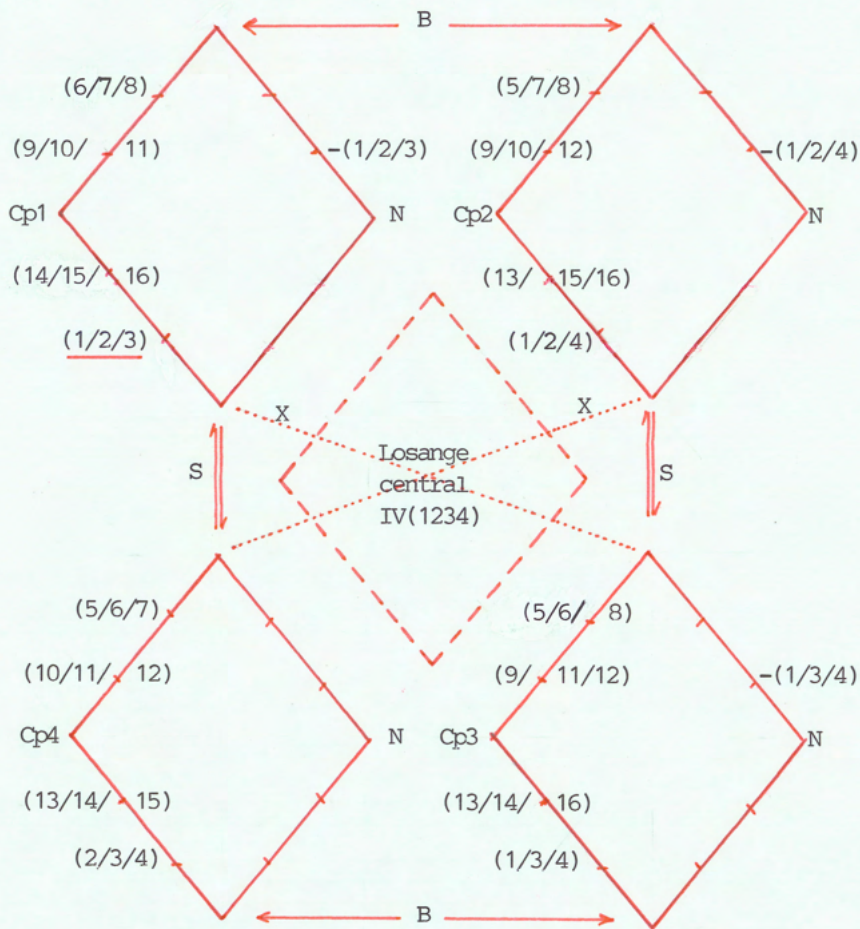
La structure du losange opératoire couronne ainsi les compositions additive et multiplicative des opérations quaternaires d'ordre I (et XV), comme elle couronnait les compositions additive et multiplicative des opérations ternaires d'ordre I (et VII).



Méd. T = 1/2/3/4/5/6/7/8 et N

Méd. F = 1/2/3/4/9/10/11/12 et N

* et 0 = Complétives générales (ordres XVI et 0)



OPERATIONS D'ORDRE III et XIII

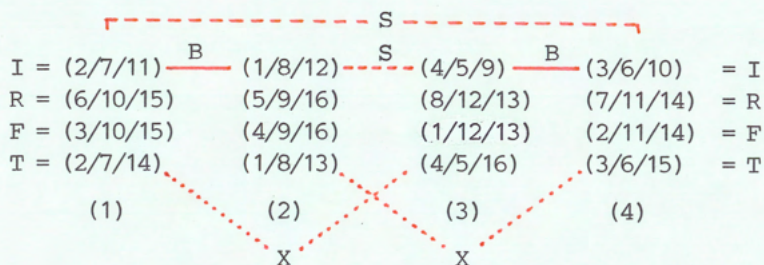
La structure devenant plus intéressante que ses opérations il nous suffit d'indiquer un petit nombre d'entre elles; les autres sont automatiquement déterminées par les règles du losange .

Le losange central IV(1234) est la solution en termes de Bornes Sup./Inf. de toutes les combinaisons deux à deux des losanges du carré .

L'examen de la combinatoire générale montre que les opérations d'ordre III, et en général les opérations de tous les ordres impair, adopteront pour structure celle des opérations d'ordre I : "carré" de losanges liés par B, S, X .

Le "carré" peut modifier sa présentation: simple réarrangement des cartes .

Soit par exemple la structure composée à partir de l'opération (2/7/11) :

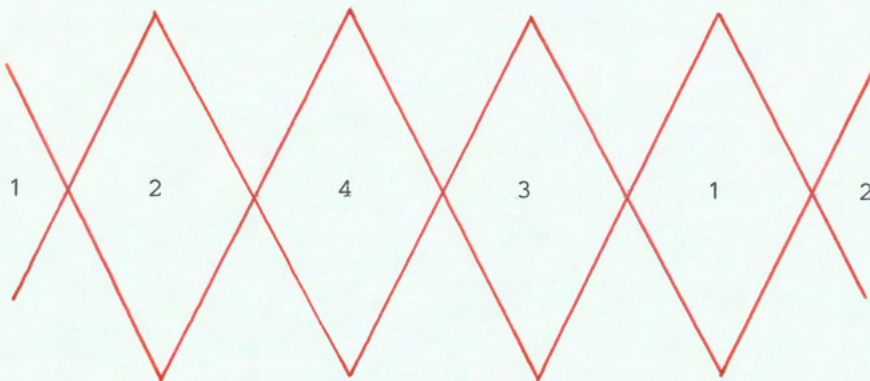


$$\text{Cp}(1) = -\text{Cp}(2) = -\text{Cp}(3) = \text{Cp}(4) = 2/3/6/7/10/11/14/15$$

$$-\text{Cp}(1) = \text{Cp}(2) = \text{Cp}(3) = -\text{Cp}(4) = 1/4/5/8/9/12/13/16$$

[Cp = Complétive]

Croisement du bi-losange avec le carré de losanges :



(entre autres distributions)

Les combinaisons additive et multiplicative de ces divers losanges conduiront à 3 structures :

- un losange double à liaison $S = X$ (complétives générales XVI et 0)
- un losange double à liaison $S = B$ (complétives générales XVI et 0)
- un bi-losange à liaison $B = X$

Les combinaisons additive et multiplicative de ces ensembles d'ordre VI conduiront à un unique losange central, identique dans toutes ses opérations au losange IV(1234) .

Ce qui correspond à la séquence composée à partir des opérations d'ordre I :

- "carré" de losanges
- trio de bi-losanges [ou variante en losange double]
- losange central d'ordre IV/XII

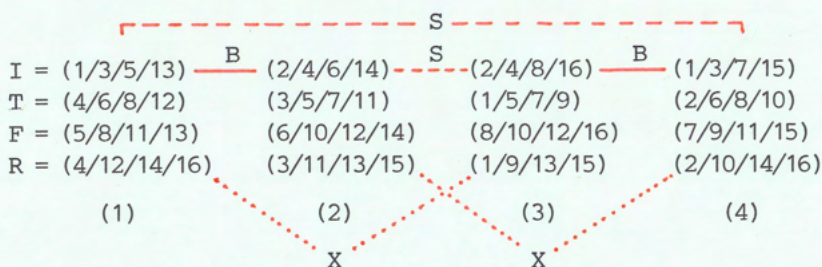
Parmi les opérations d'ordre III, certaines fourniront donc une séquence d'emboîtements conduisant directement du "carré" de losanges au losange central IV/XII; d'autres fourniront une séquence équivalente (en-deçà des croisements et variantes) à celle des opérations d'ordre I .

OPERATIONS D'ORDRE IV/XII :

La première d'entre elles est le germe du losange central qui couronne la séquence d'emboîtements des opérations d'ordre I ou II ou III .

Mais ces opérations sont nombreuses (1820×2) et leurs combinaisons de groupe ne se limitent pas au losange simple .

Soit par ex. l'opération (1/3/5/13)

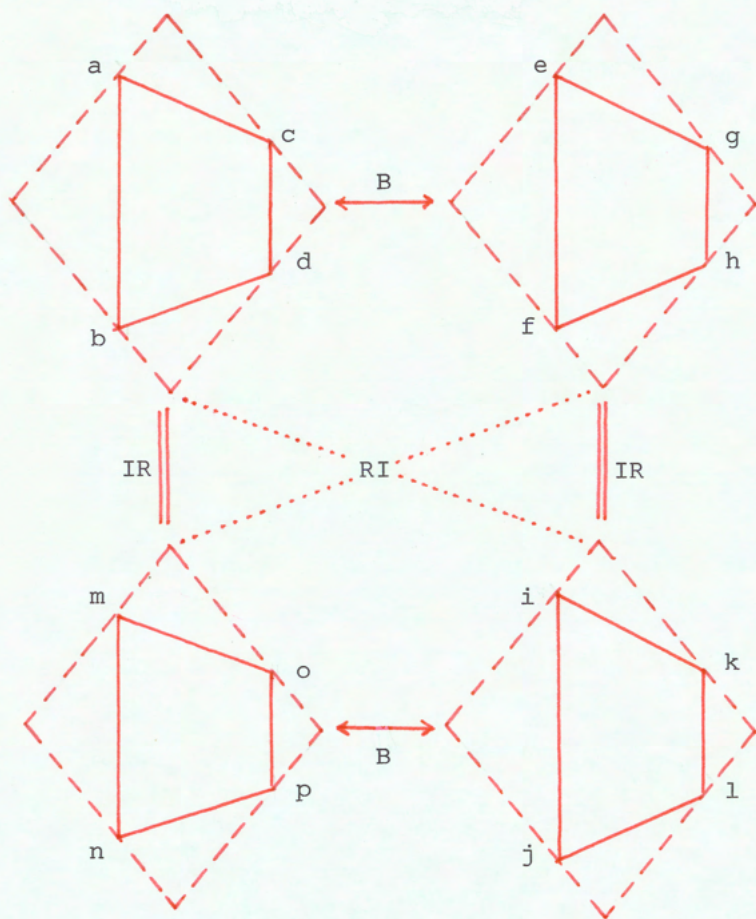


Les Complétives sont toutes différentes . L'ensemble compose donc un carré de losanges liés par B, S, X . Ou si l'on préfère abandonner l'aspect Relation d'emboîtement imposé par le losange (et dont nous avons vu à propos des opérations ternaires qu'il comporte une forte part de répétition réfléchissante): carré de 4 groupes de 8 transformations liés par B, S, X; ou encore: groupe canonique de 32 transformations .

L'examen de ces premiers degrés d'ordre opératoire est suffisant pour illustrer le principe d'universalité du code des combinaisons [page 100] au sein du système quaternaire . Ce code institue en effet entre les éléments représentatifs des opérations un ensemble symétrique de correspondances, telles que chacun est lié à tous les autres sans redondance . Il s'applique donc a priori sous une forme régulière à l'intégralité des opérations .

Le problème en cause n'est donc pas celui de l'application du code des transformations de groupe . Celui-ci peut être localement amélioré par des transformations secondaires, au prix d'une légère redondance : ainsi les transformations IR et RI divisent la relation B et en répètent chacune à part les moitiés complémentaires .

L'utilité de cette codification secondaire se limite à la recomposition de carrés, dans l'esprit de la structure canonique, là où la réduction de certaines transformations les unes aux autres ont préalablement simplifié la structure . Un autre exemple en est offert par des opérations d'ordre VIII :



Carré de sous-groupes
INTD

a = 1/6/7/8/9/10/11/16	e = 2/5/7/8/9/10/12/15
b = 1/2/3/8/9/14/15/16	f = 1/2/4/7/10/13/15/16
c = 4/5/6/7/10/11/12/13	g = -f
d = 2/3/4/5/12/13/14/15	h = -e
i = 2/6/7/8/9/10/11/15	m = 1/5/7/8/9/10/12/16
j = 1/2/3/7/10/14/15/16	n = 1/2/4/8/9/13/15/16
k = -j	o = -n
l = -i	p = -m

I = R	T = F
S = D	X = Db

Le problème a également cessé d'être celui de l'application des règles du losange opératoire, qui enrichit le code par des relations d'emboîtement: la validité permanente de celles-ci est en principe démontrée par son organisation complète des opérations binaires, auxquelles toutes les opérations de type supérieur sont réductibles. Elle est confirmée par l'organisation entière des opérations ternaires.

L'enjeu se concentre donc dans la question : comment évoluent les structures représentatives du groupe fondamental d'un type opératoire, groupe organisant sur des losanges les rapports d'emboîtement qui en font une molécule opératoire complète et distincte ?

Cette évolution se prend aussi bien en termes de forme directe qu'en termes de séquence .

En effet, l'examen des opérations ternaires, puis quaternaires conduit à deux résultats provisoires :

- présence d'une structure canonique: bi-losange, puis carré de losanges . Donc multiplication par 2 de la molécule opératoire fondamentale du système bivalent .

- présence d'une séquence normale, faite de la structure canonique du type considéré, puis de la répétition des structures des types précédents, jusqu'au losange central unique .

L'adoption des structures des types précédents est caractéristique des opérations à n° d'ordre pair, c.a.d. celles pour lesquelles toutes les transformations ne restent pas toujours distinctes .

Remarquons que les trois structures de la séquence normale sont ici représentées par l'examen :

- des opérations d'ordre I (et leurs inverses)
- des premières opérations d'ordre II
- des premières opérations d'ordre IV

Ainsi, un tout petit nombre d'opérations choisies dans les ordres I, II et IV suffit à représenter structuralement la totalité du système .

De la sorte, plus on s'élève dans la hiérarchie des degrés opératoires, moins les opérations restent l'objet direct de l'analyse, qui se concentre sur les structures qui les totalisent . Ainsi un "losange" deviendra de plus en plus un objet simple, comme l'était l'"opération" dans les systèmes élémentaires, et d'autant plus aisément que ce losange peut s'abréger en quelques opérations pertinentes, voire même une seule, puisque toutes les autres s'en déduisent selon les règles .

Les milliards de milliards d'opérations propres aux systèmes à 5, 6, 50 ou 1000 propositions (ou plus) s'effacent donc au profit du calcul de quelques structures répétables, capables d'assimiler toute la matière opératoire .

Dès lors l'objet de l'analyse n'est plus la structuration directe des opérations mais la structuration des structures elle-mêmes, abstraction faite de la question de savoir ce qu'elles signifient pour l'hypothétique sujet psycho-logique qui formulerait les propositions .

STRUCTURATION DES OPERATIONS QUINQUENAIRES

Ces opérations représentent la combinaison de 5 propositions selon les valeurs symboliques du 1 et du 0 . Elles ont pour nombre le carré de celui du système de degré inférieur : $(65536)^2 = 4\ 294\ 967\ 296$. La matrice bivalente de ces opérations est le double de celle du système de degré inférieur : série de 32 cases, à remplir par 1 ou 0 .

Les opérations sont écrites en symboles numériques ordinaux référés à la matrice bivalente. La signification propositionnelle de ces éléments pourra toujours être reconstruite à partir du tableau donné pour les opérations quaternaires (page 92) en ajoutant une proposition et en appliquant le mécanisme suivant:

- une série de 16 p, une série de 16 $\bar{p}$
- " 8 q " 8 $\bar{q}$
- " 4 r " 4 $\bar{r}$

- une série de 2 s, une série de 2 $\bar{s}$
- t, $\bar{t}$, t, $\bar{t}$, t, $\bar{t}$, etc.

OPERATIONS D'ORDRE I (et XXXI)

Leur structure conserve toutes les relations canoniques des systèmes antérieurs :

- le groupe de 8 (INTDFVRC) et les règles du losange
- les transformations reproductives de groupes et losanges: B, S, X (classe 2)

Leur originalité consistera dans l'introduction d'une nouvelle classe de transformations .

Par rapport aux transformations antérieures, la combinaison initiatrice (Y) de cette classe nouvelle (classe 3) peut se définir sous la forme: 2S

- Y, déf. : - division de la matrice bivalente en séries de 8
- chaque série exécute à l'intérieur d'elle-même la transformation R

Cette transformation permet de passer d'un groupe modulaire IBX de 4 losanges à un second groupe modulaire isomorphe de 4 losanges .

B	X	S	SY	XY	BY	Y	TY	TBY	TXy	TSy
1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7	1-8	1-9	1-10	1-11	1-12
3-4	2-4	2-3	2-6	2-5	2-8	2-7	2-10	2-9	2-12	2-11
5-6	5-7	5-8	3-7	3-8	3-5	3-6	3-11	3-12	3-9	3-10
7-8	6-8	6-7	4-8	4-7	4-6	4-5	4-12	4-11	4-10	4-9
9-10	9-11	9-12	9-13	9-14	9-15	9-16	5-13	5-14	5-15	5-16
11-12	10-12	10-11	10-14	10-13	10-16	10-15	6-14	6-13	6-16	6-15
13-14	13-15	13-16	11-15	11-16	11-13	11-14	7-15	7-16	7-13	7-14
15-16	14-16	14-15	12-16	12-15	12-14	12-13	8-16	8-15	8-14	8-13
17-18	17-19	17-20	17-21	17-22	17-23	17-24	17-25	17-26	17-27	17-28
19-20	18-20	18-19	18-22	18-21	18-24	18-23	18-26	18-25	18-28	18-27
21-22	21-23	21-24	19-23	19-24	19-21	19-22	19-27	19-28	19-25	19-26
23-24	22-24	22-23	20-24	20-23	20-22	20-21	20-28	20-27	20-26	20-25
25-26	25-27	25-28	25-29	25-30	25-31	25-32	21-29	21-30	21-31	21-32
27-28	26-28	26-27	26-30	26-29	26-32	26-31	22-30	22-29	22-32	22-31
29-30	29-31	29-32	27-31	27-32	27-29	27-30	23-31	23-32	23-29	23-30
31-32	30-32	30-31	28-32	28-31	28-30	28-29	24-32	24-31	24-30	24-29

Code des transformations des opérations quinquénaires (1)

Ts	Tx	Tb	T	F	Fb	Fx	Fs	FSy	FXy	FBy
1-13	1-14	1-15	1-16	1-17	1-18	1-19	1-20	1-21	1-22	1-23
2-14	2-13	2-16	2-15	2-18	2-17	2-20	2-19	2-22	2-21	2-24
3-15	3-16	3-13	3-14	3-19	3-20	3-17	3-18	3-23	3-24	3-21
4-16	4-15	4-14	4-13	4-20	4-19	4-18	4-17	4-24	4-23	4-22
5-9	5-10	5-11	5-12	5-21	5-22	5-23	5-24	5-17	5-18	5-19
6-10	6-9	6-12	6-11	6-22	6-21	6-24	6-23	6-18	6-17	6-20
7-11	7-12	7-9	7-10	7-23	7-24	7-21	7-22	7-19	7-20	7-17
8-12	8-11	8-10	8-9	8-24	8-23	8-22	8-21	8-20	8-19	8-18
17-29	17-30	17-31	17-32	9-25	9-26	9-27	9-28	9-29	9-30	9-31
18-30	18-29	18-32	18-31	10-26	10-25	10-28	10-27	10-30	10-29	10-32
19-31	19-32	19-29	19-30	11-27	11-28	11-25	11-26	11-31	11-32	11-29
20-32	20-31	20-30	20-29	12-28	12-27	12-26	12-25	12-32	12-31	12-30
21-25	21-26	21-27	21-28	13-29	13-30	13-31	13-32	13-25	13-26	13-27
22-26	22-25	22-28	22-27	14-30	14-29	14-32	14-31	14-26	14-25	14-28
23-27	23-28	23-25	23-26	15-31	15-32	15-29	15-30	15-27	15-28	15-25
24-28	24-27	24-26	24-25	16-32	16-31	16-30	16-29	16-28	16-27	16-26

Code des transformations des opérations quinquennaires (2)

Fy	Ry	RBy	Rxy	RSy	Rs	Rx	Rb	R	Chaque transformation de ce code admet une inverse (N)
1-24	1-25	1-26	1-27	1-28	1-29	1-30	1-31	1-32	
2-23	2-26	2-25	2-28	2-27	2-30	2-29	2-32	2-31	
3-22	3-27	3-28	3-25	3-26	3-31	3-32	3-29	3-30	
4-21	4-28	4-27	4-26	4-25	4-32	4-31	4-30	4-29	
5-20	5-29	5-30	5-31	5-32	5-25	5-26	5-27	5-28	
6-19	6-30	6-29	6-32	6-31	6-26	6-25	6-28	6-27	
7-18	7-31	7-32	7-29	7-30	7-27	7-28	7-25	7-26	
8-17	8-32	8-31	8-30	8-29	8-28	8-27	8-26	8-25	
9-32	9-17	9-18	9-19	9-20	9-21	9-22	9-23	9-24	
10-31	10-18	10-17	10-20	10-19	10-22	10-21	10-24	10-23	
11-30	11-19	11-20	11-17	11-18	11-23	11-24	11-21	11-22	
12-29	12-20	12-19	12-18	12-17	12-24	12-23	12-22	12-21	
13-28	13-21	13-22	13-23	13-24	13-17	13-18	13-19	13-20	
14-27	14-22	14-21	14-24	14-23	14-18	14-17	14-20	14-19	
15-26	15-23	15-24	15-21	15-22	15-19	15-20	15-18	15-17	
16-25	16-24	16-23	16-22	16-21	16-20	16-19	16-18	16-17	

Code des transformations des opérations quinquénaires (3)

Modules transformationnels de la classe 2 :

I B S X Y By Sy Xy

Chaque module se développe en un groupe de 8: INRCTDFV
ou isomorphe : B Nb Rb Cb Tb Db Fb Vb

Y Ny Ry Cy Ty Dy Fy Vy

Sy NSy RSy CSy TSy DSy FSy VSy

etc.

qui constituent les transformations de la classe 1 .

Le groupe commutatif des 64 transformations de la

classe 1 (correspondant au code des combinaisons)

se réduira donc (sur le modèle des pages 50 et 98)

à un groupe commutatif de 8 modules transformationnels
de la classe 2 (indice °) :

	I°	B°	S°	X°	Y°	By°	Sy°	Xy°
I°	I°	B°	S°	X°	Y°	By°	Sy°	Xy°
B°	B°	I°	X°	S°	By°	Y°	Xy°	Sy°
S°	S°	X°	I°	B°	Sy°	Xy°	Y°	By°
X°	X°	S°	B°	I°	Xy°	Sy°	By°	Y°
Y°	Y°	By°	Sy°	Xy°	I°	B°	S°	X°
By°	By°	Y°	Xy°	Sy°	B°	I°	X°	S°
Sy°	Sy°	Xy°	Y°	By°	S°	X°	I°	B°
Xy°	Xy°	Sy°	By°	Y°	X°	S°	B°	I°

Tableau qui se réduit lui-même à celui des modules de modules de la classe 3 (indice *) :

	I*	Y*
I*	I*	Y*
Y*	Y*	I*

Les modules I^* et Y^* ont la même puissance: il s'établit entre l'un et l'autre une correspondance univoque et réciproque .

L'équivalence des modules (*) se transfère aux carrés de losanges qu'ils gouvernent: il s'établit entre l'un et l'autre une correspondance univoque et réciproque .

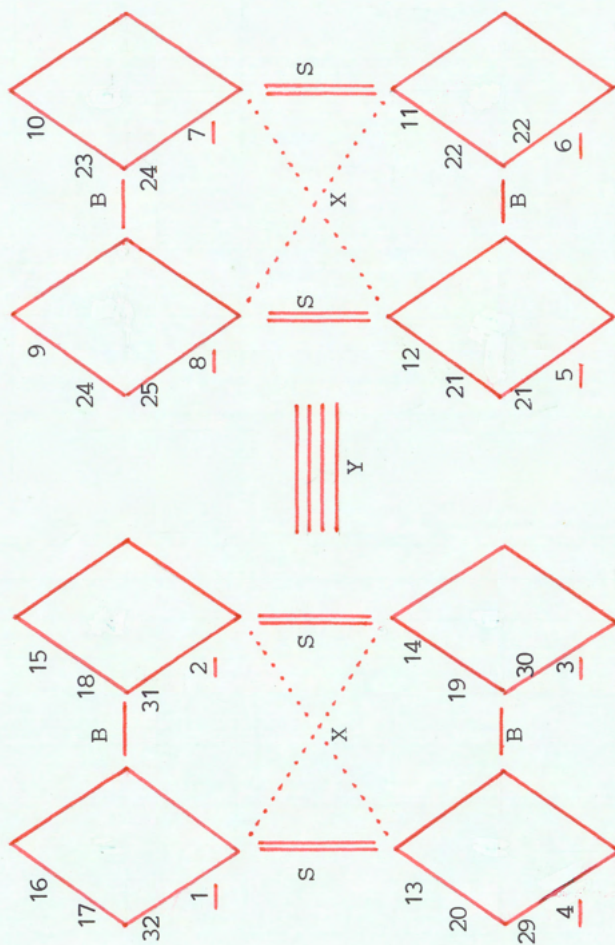
Notons que l'introduction d'une classe nouvelle de transformations plutôt que la multiplication de transformations de la classe précédente ne relève pas d'une logique sous-jacente mais d'une décision régulatrice .

Un choix inverse a été fait lors de la présentation des transformations S et X . Celles-ci ont été considérées comme des transformations de puissance égale à B, c'est à dire reproductrices de groupes de 8 ou de losanges . Tout aussi acceptable aurait été l'option consistant à considérer l'une ou l'autre

comme initiatrice d'une classe 3, définie comme reproductrice de losange double . Dans ce cas Y deviendrait une transformation de classe 4, reproductrice de carré de losanges . A chaque changement de structure, changement de classe de transformations. L'option choisie a été différente: construire le carré de losanges comme une unité primitive qui absorbe entièrement le losange double et ré-initialise le système des combinaisons . Primat de la régulation des structures sur celle des propositions.

Le carré de losanges signifie-t-il quelque chose en termes de logique interpropositionnelle ? Il organise l'essentiel de ses transformations à un niveau de complexité combinatoire où elle s'exerce rarement, mais cette structure désormais désigne un autre ordre de phénomènes idéaux . Le carré de losanges cristallise le niveau d'intégration où la logique interstructurelle se substitue à la logique interpropositionnelle . Dans l'un des mondes possibles l'esprit doit enchaîner des structures comme les hommes enchaînent des propositions .

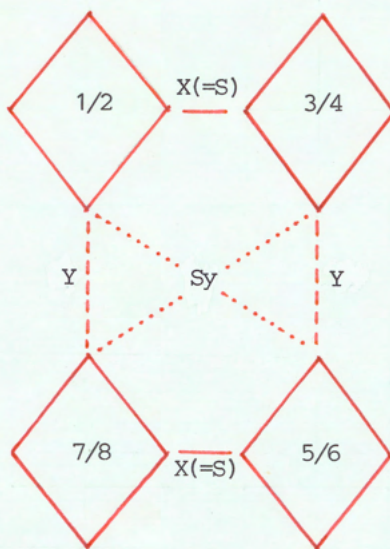
La structure canonique des opérations quinquénaires pourra donc se représenter ainsi :



Structure canonique des opérations quinquénaires

OPERATIONS D'ORDRE II (et XXX)

L'exemple des opérations ternaires, puis quaternaires permet de supposer que les opérations d'ordre II/XXX obtenues comme Bornes Sup/Inf à partir des opérations précédentes seront organisées selon la structure canonique du système de degré inférieur .



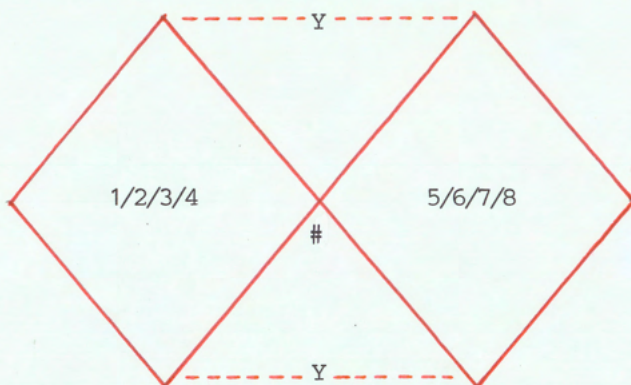
Losanges symbolisés
par la première de
leurs opérations .

Relations similaires
observables sur les
séries :

13-24-57-68
14-23-58-67
15-26-37-48
16-25-37-48
17-28-35-46
18-27-36-45

OPERATIONS D'ORDRE IV (et XXVIII)

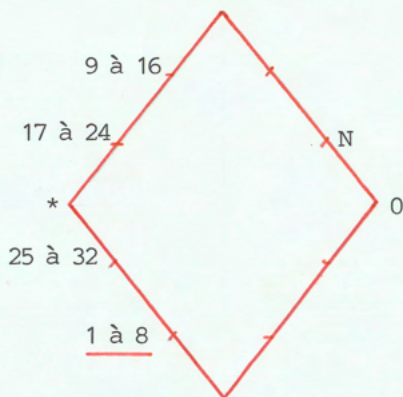
La séquence normale des emboîtements de structures se poursuit avec les opérations d'ordre IV/XXVIII obtenues comme Bornes Sup/Inf à partir des précédentes opérations d'ordre II/XXX, engendrées par le même procédé .



Losanges symbolisés par la première de leurs op.
 Complétive identique : 5/6/7/8/9/10/11/12/21/22/23/24/25/
 26/27/28 (#)

Les deux autres structures d'ordre IV/XXVIII obtenues par composition additive et multiplicative des précédentes séries d'ordre II/XXX (symbolisables par $1/2/5/6$ ---- $3/4/7/8$ et $1/2/7/8$ ---- $3/4/5/6$) composent également des bi-losanges . La transformation de classe 2 en jeu dans l'un comme dans l'autre est $S = X$.

OPERATIONS D'ORDRE VIII (et XXIV)



La séquence normale des emboîtements de structure s'achève avec le losange simple obtenu par compositions des opérations des précédents bi-losg.

La structure canonique des opérations de degré quinquénaires est donc le double carré de losanges, lié, carré à carré, par la transformation de classe 3 : Y . La structure interne des carrés utilise l'ensemble des transformations canoniques des opérations des degrés inférieurs .

La séquence normale des emboîtements de structure comprend : le double carré de losanges (quinquénaire)
le carré de losanges (quaternaire)
le bi-losange (ternaire)
le losange simple (binaire)

La structure canonique se multiplie par 2 à chaque changement de degré opératoire .

L'intégration des structures à travers leur complexification est assurée par la constance des règles combinatoires et de leur mode d'évolution.

STRUCTURATION
DES
OPERATIONS SEXTENAIRES

Leur nombre est le carré de celui du système de degré inférieur : 18 446 744 073 709 551 616
Matrice bivalente : série de 64 cases .

Leur structure canonique, qui est aussi celle des opérations d'ordre I, sera le double de la structure de degré inférieur: carré de carrés de losanges .

Leur originalité consistera dans l'adjonction de 2 nouvelles transformations de la classe 3 .

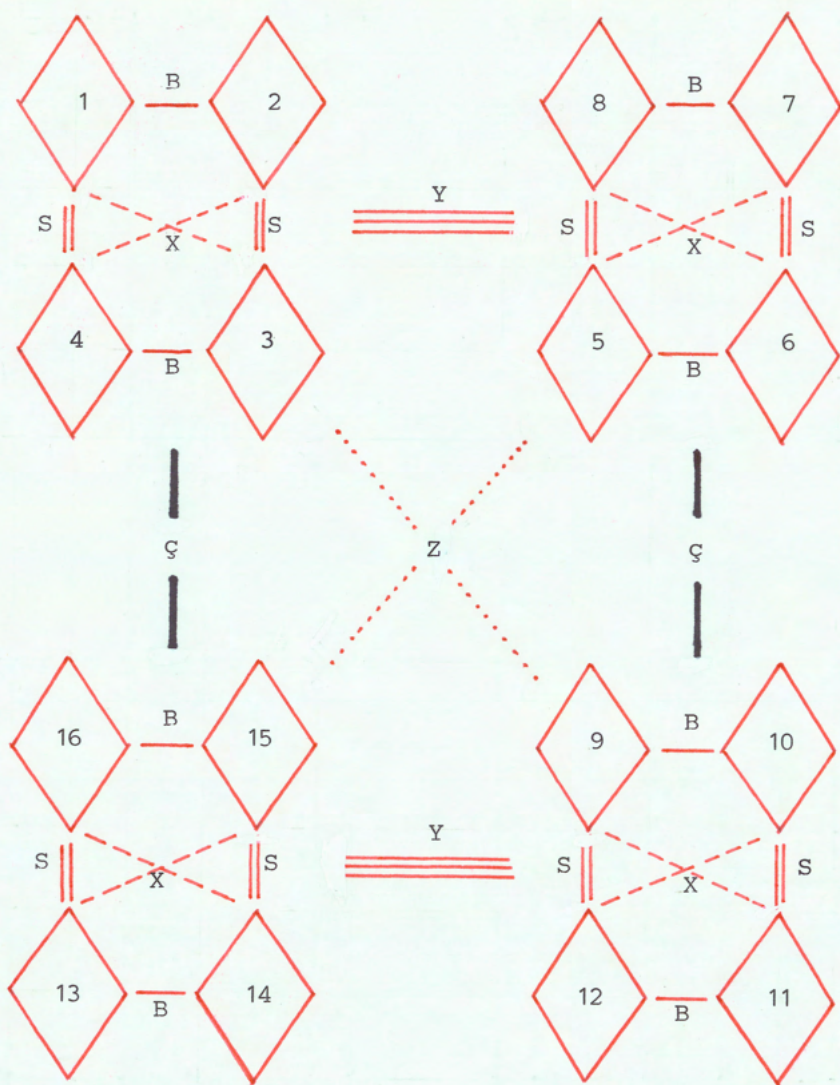
- ç (=2Y) : - division de la matrice bivalente en séries de 16
- chaque série exerce à l'intérieur d'elle-même la transformation R

- Z ($=2S_y=4X$) :
- division de la matrice bivalente en séries de 16
 - chaque série exerce à l'intérieur d'elle-même la transformation F

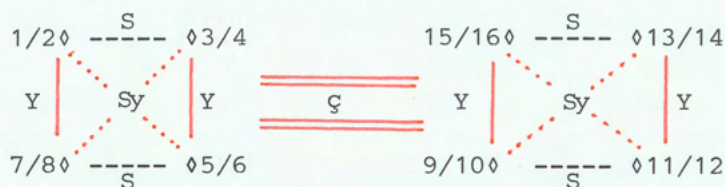
Le tableau des transformations peut s'abréger de la façon suivante :

	I	T	F	R	
B	1	32	33	64	S
	2	31	34	63	
B	3	30	35	62	S
	4	29	36	61	
B	5	28	37	60	S
	6	27	38	59	
etc.	7	26	39	58	S
	8	25	40	57	
	9	24	41	56	etc.
	10	23	42	55	
	11	22	43	54	etc.
	12	21	44	53	
Y	13	20	45	52	etc.
	14	19	46	51	
	15	18	47	50	etc.
	16	17	48	49	

En combinaison avec N : groupe de 128 transformations .

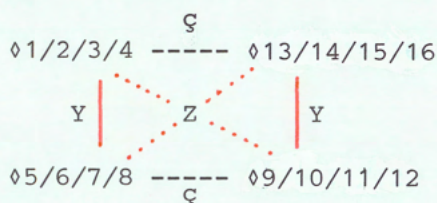


Les opérations d'ordre II admettront le double carré:



[en résumant chaque losange ($\diamond$) par la première de ses opérations]

Les opérations d'ordre IV admettront le carré de losanges :



Les opérations d'ordre VIII admettront le bi-losange:

$$(1\grave{a}8) \diamond \text{-----} \diamond (9\grave{a}16) \\ \zeta (=Z)$$

[complétive centrale commune : (9à24/41à56)]

Les opérations d'ordre XVI admettront le losange simple :

Si I s'applique à l'opération (1à16)

T = (17à32)

F = (33à48) mêmes rapports entre leurs N, affectées

R = (49à64) du signe - .

Complétive affirmative : LXIV

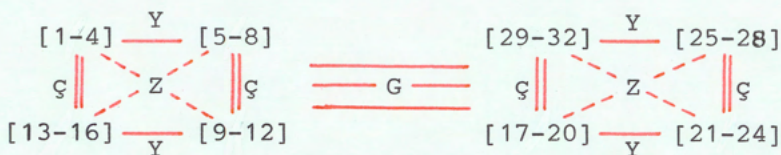
Complétive négative : 0

La structure canonique des opérations septénaires (matrice bivalente: 128 cases) s'obtiendra par doublement de la structure du degré inférieur : double carré de carrés de losanges .

Introduction d'une nouvelle classe de transformations ($\zeta \times 2 = Y \times 4$) :

- G = - division de la matrice bivalente en séries de 32
 - chaque série exerce à l'intérieur d'elle-même la transformation R

La transformation G se définit comme reproductrice du carré global de losanges (classe 4)



Tous les modules transformationnels antérieurs sont intégrés .

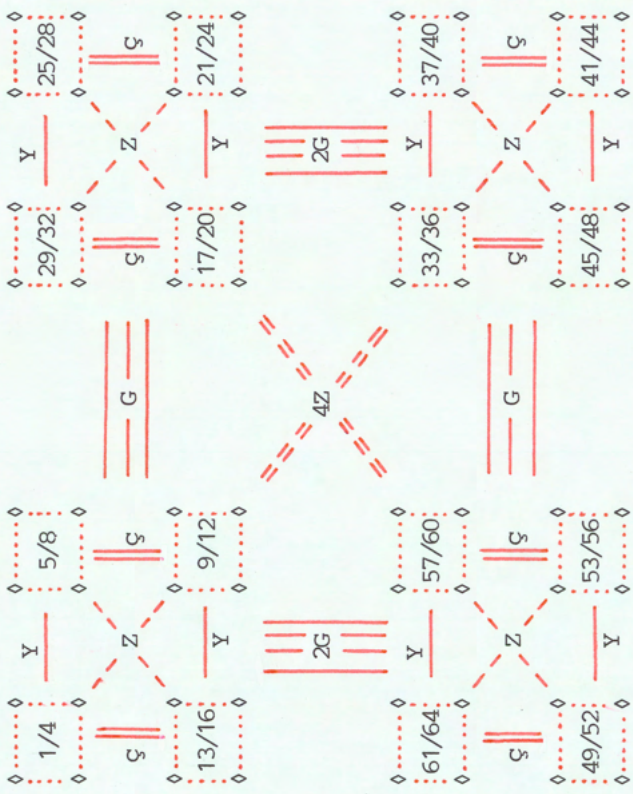
La structure canonique des opérations octonaires (matrice bivalente: 256 cases) s'obtiendra par doublement de la structure de degré inférieur : carré de carrés de carrés de losanges .

Deux nouvelles transformations complètent la classe 4 : $G \times 2$ et $Z \times 4$

2G = - division de la matrice en séries de 64
- chaque série exerce pour elle-même la transformation R

4Z = - division de la matrice en séries de 64
- chaque série exerce pour elle-même la transformation F

La structure canonique constitue un ensemble de 1408 opérations, basées sur un groupe commutatif de 512 transformations .



Les transformations des systèmes de degré ultérieur seront basées sur le tableau suivant :

Classe 2	B			Groupe de 16
	(x2) S		X	32
Classe 3	(x2) Y			Groupe de 64
	(x2) ζ	(x4) Z		128
Classe 4	(x2) G			Groupe de 256
	(x2) 2G	(x4) 4Z		512
Classe 5	(x2) 4G			etc.
	(x2) 8G	(x4) 16Z		
Classe 6	(x2) #			
	(x2) ##	(x4) &		
Classe 7	etc.			

et ainsi de suite, sans limite .